

## **Optional Trading Pricing with a New Analytic Method for the Black-Scholes Equation**

**Mehdi Abvali<sup>1</sup>, Maryam Khaliliaraghi<sup>2</sup>, Hasan Hassanabadi<sup>3</sup>, Ahmad Yaghoobnezhad<sup>4</sup>**

### **Abstract**

The Black-Scholes pricing theory is one of the most important methods for valuating transaction options. This equation is used to price a variety of European options. In this paper, a new method was developed to prove and improve the Black-Scholes equation by focusing on the Black-Scholes main Schrödinger-like equation and solving this equation using the Nikiforov-Uvarov method. While investigating the possibility of improving the Black-Scholes equation with this method, a new equation for the pricing of transaction options was presented and tested. The goals of this study include increasing the accuracy of pricing options by using the equation provided, especially for high-value trades; checking a logical solution in a new way; comparing outputs with the numerical solution; and innovating the final formula based on Lagrange polynomial functions. The results showed that a different proof for the Black-Scholes equation is possible by solving the differential equation by the Nikiforov-Uvarov method and, at the 95% confidence level, there is no significant difference between the price of the two main Black-Scholes groups and the new model. In order to compare the output of the new model with that of the Black-Scholes main model, the data of 50 coin options in Iran Fara Bourse from 2015 to 2018 were used, and two independent groups were compared using the Mann-Whitney U test.

**Keywords:** Option, Black-Scholes Equation, Schrödinger-Like Equation, Nikiforov-Uvarov Method

**JEL:** F20, E37, G12

- 
- 1 . Ph.D. student, Department of Finance, Islamic Azad University, Tehran, Iran. Corresponding Author, Email: Mehdiabvali@yahoo.com
  - 2 . Assistant professor, Department of Finance, Islamic Azad University, Science and Research Branch, Tehran, Iran. Email: m.khaliliaraghi@gmail.com
  - 3 . Professor, Department of Physics, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran. Email: hha1349@gmail.com
  - 4 . Associate professor, Department of Accounting, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Iran, Email: yaghoobacc@gmail.com

## قیمت گذاری اختیار معامله با روش تحلیلی جدید برای معادله بلک شولز<sup>۱</sup>

مهدی ابوالی<sup>۲</sup>، مریم خلیلی عراقی<sup>۳</sup>، حسن حسن آبادی<sup>۴</sup> و احمد یعقوب نژاد<sup>۵</sup>

### چکیده

تئوری قیمت گذاری بلک شولز، یکی از شیوه‌های مهم ارزش گذاری اوراق اختیار معامله می‌باشد. این معادله جهت قیمت گذاری انواع اختیارهای خرید و فروش اروپایی استفاده می‌شود. در این مقاله با تمرکز بر معادله شرودینگر گونه اصلی بلک شولز و حل این معادله با روش نیکی وورو - اوواروف، روشی متفاوت و جدید برای اثبات و بهبود معادله بلک شولز ارزیابی گردید. در ادامه، ضمن بررسی امکان بهبود معادله بلک شولز با این روش، معادله‌ای جدید برای قیمت گذاری اختیار معامله ارائه و آزمون گردید. افزایش دقت قیمت گذاری معامله‌های اختیار با استفاده از معادله ارائه شده به‌ویژه برای معامله‌های با بهای بالا، بررسی حل منطقی به روشی جدید، قابلیت مقایسه خروجی با حل عددی و نوآوری فرمول نهایی اختیار برحسب توابع چندجمله‌ای لاگر، از اهداف انجام پژوهش حاضر می‌باشند. نتایج نشان داد؛ امکان اثباتی متفاوت برای معادله بلک شولز از طریق حل معادله دیفرانسیل به روش نیکی وورو - اوواروف امکان پذیر بوده و در سطح اطمینان ۹۵ درصد، بین قیمت گذاری دو گروه اصلی بلک شولز و مدل جدید ارائه شده، تفاوت معنی داری وجود ندارد. به منظور مقایسه بین خروجی مدل جدید و مدل اصلی بلک شولز از اطلاعات ۵۰ اختیار معامله سکه در فرابورس ایران محدود به بازه زمانی ۱۳۹۴ لغایت ۱۳۹۷ استفاده و از آزمون مقایسه‌ای دو گروه مستقل ناپارامتریک من ویتنی استفاده گردید.

**واژه های کلیدی:** اختیار معامله، معادله قیمت گذاری بلک شولز، معادله شرودینگر گونه و روش

پارامتری نیکی وورو - اوواروف.

طبقه بندی موضوعی: F20, E37, G12

۱. کد DOI مقاله: 10.22051/JFM.2019.21835.1763

۲. دانشجوی دکتری، گروه مالی، واحد علوم تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران، نویسنده مسئول. Email: Mehdiabvali@yahoo.com

۳. استادیار، گروه مالی، واحد علوم تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران، Email: m.khaliliaraghi@gmail.com

۴. استاد تمام، گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران، Email: hha1349@gmail.com

۵. دانشیار، گروه حسابداری، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران، Email: yaghoobacc@gmail.com

## مقدمه

در سالیان گذشته، تلاش‌های زیادی برای ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله<sup>۱</sup> انجام شده است. در اوایل دهه ۱۹۷۰، روشی نوآورانه توسط فیشر بلک<sup>۲</sup>، رابرت مرتون<sup>۳</sup> و میرون شولز<sup>۴</sup> جهت قیمت‌گذاری این اوراق ارائه گردید. بعدها روش آن‌ها با عنوان الگوی قیمت‌گذاری بلک‌شولز مشهور شد. این مدل مرتبط با مفهوم ارزش‌گذاری اوراق است. اتخاذ تصمیم‌های سرمایه‌گذاری و تخصیص بهینه منابع، مستلزم ارزش‌گذاری با استفاده از روش‌های معتبر علمی است. در مدل قیمت‌گذاری بلک‌شولز عواملی نظیر قیمت توافقی، قیمت پایه دارایی، نوسان پذیری انتظاری، زمان تا سررسید و نرخ بهره بدون ریسک تأثیرگذار می‌باشند. مشکلاتی همانند مفروضات مدل، عدم تطبیق با توزیع آماری داده‌های قیمت سهام، فرض بازار کامل، عدم دخالت هزینه معاملات و امکان خرید هر میزان سهام با قیمت اعلان‌شده در بازار برای تطبیق سبد معادل‌ساز با تغییرات قیمت سهام، بر مدل بلک‌شولز مترتب می‌باشند. می‌توان دریافت که این مشکلات آن‌قدر اساسی هستند که حتی حل آن‌ها در مدل ساده‌ی بلک‌شولز هم می‌تواند مهم باشد. تجزیه و تحلیل قیمت اختیار معامله را می‌توان در طول زمان با یک معادله دیفرانسیل جزئی توصیف کرد. توسعه مدل بر اساس تطبیق معکوس عددی با تبدیل لاپلاس و روش اختلاف محدود و یا تحولات متغیر بر اساس تغییر ملین و روش‌های حل تقریبی برای حل معادله صورت پذیرفته است. (آهن، کوون و کانگ<sup>۵</sup>، ۲۰۱۰، صص ۲۴۷ - ۲۵۵) به‌تازگی روش‌های حل بر اساس پارامترهای وابسته به زمان و بدون وقفه بازپرداخت، پیشنهاد شده است (کومار و سینگ، ۲۰۱۴، صص ۱۷۷-۱۸۳). در این مقاله با تمرکز بر روش‌های مبنایی معادله بلک‌شولز یعنی معادله شرو دینگر گونه اصلی، امکان ارائه‌ی معادله‌ای جدید را بررسی و آزمون می‌کنیم. بررسی صورت گرفته در این پژوهش تحلیلی و کاربردی<sup>۶</sup> بوده و بر این اساس است که چگونه نتایج حاصله بر تنوری مورد مطالعه انطباق و ارتباط پیدا می‌کند (کورتس و دیگران، ۲۰۰۰، ص ۱۰۰۲). مقصود از انطباق و ارتباط در این پژوهش بررسی رابطه‌ی مدل جدید ارائه‌شده با مدل اصلی بلک‌شولز می‌باشد. اهمیت و هدف این پژوهش، کاهش نواقص مدل قیمت‌گذاری

- 
- 1 . Options
  - 2 . Fisher Black
  - 3 . Robert Merton
  - 4 . Myron Scholes
  - 5 . Ahn J, Kang S, Kwon YH
  - 6 . Analytical and Applied

بلکه شولز و افزایش قابلیت کاربرد آن از طریق به‌کارگیری روش‌های جدید حل معادلات دیفرانسیل همانند روش پارمتری نیکی وورو - اوواروف<sup>۱</sup> می‌باشد.

### مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

قیمت‌گذاری یک قرارداد اختیار خرید به سه عامل اثرگذار تفاوت قیمت توافقی آن اختیار معامله و سهم پایه، تعداد روزهای باقی‌مانده به انقضا و نوسان پذیری انتظاری آن سهم در روزهای باقیمانده وابسته است. طبیعی است که قیمت اختیار معامله‌های پر نوسان، گران‌تر از قیمت قرارداد اختیار معامله‌های با نوسانات کم هستند. مفهوم ارزش اقتصادی هنگامی مطرح می‌شود که اشیاء، از جهت رجحان یا مبادله در مقایسه با یکدیگر قرار می‌گیرند. در ابتدای دهه ۱۶۳۰، معامله اختیار معاملات، برای خرید و فروش پیاز لاله‌های هلندی در بازار معاملات آمستردام رواج پیدا کرد. (جان هال<sup>۲</sup>، ۱۳۸۸، صص ۱۵۲-۲۵۰) در سال ۱۹۷۳، کمیته مبادلات شیکاگو یک بورس انحصاری برای اختیار معاملات بر روی سهام تشکیل داد. بورس اختیار معامله شیکاگو در ۲۶ آوریل ۱۹۷۳، درهای خود را به روی معاملات اختیار خرید گشود و مبادله اختیار معامله روی سهام در سال ۱۹۷۵ در بورس سهام آمریکا و بورس سهام فیلادلفیا راه‌اندازی گردید. در حال حاضر، بخش اعظم معاملات در بورس‌های سازمان‌یافته صورت می‌پذیرد. (رومان و ایوانف، ۲۰۱۵، صص ۹۷۹-۹۹۳) اولین مدل در زمینه قیمت‌گذاری اختیار معامله توسط لوئیس باچلیر<sup>۳</sup> در سال ۱۹۰۰ ارائه شده است. وی نتیجه گرفت که ارزش مورد انتظار اختیار معامله در زمان سررسید برابر معادله<sup>۴</sup> یک می‌باشد:

$$c = s - \delta \left( \frac{s-x}{\delta\sqrt{t}} \right) - x \delta \left( \frac{s-x}{\delta\sqrt{t}} \right) + \delta\sqrt{t} + \delta \left( \frac{s-x}{\delta\sqrt{t}} \right) \quad (1)$$

در این فرمول  $s$  قیمت سهام عادی پایه،  $x$  قیمت توافقی قرارداد اختیار معامله،  $t$  زمان تا سررسید،  $\delta$  انحراف معیار بازدهی و  $Q(t)$  توزیع نرمال تجمعی استاندارد است. مدل باچلیر سپس توسط کروایزینگا<sup>۴</sup> در سال ۱۹۵۶ میلادی مورد تعدیل قرار گرفت. اکثر پیشرفت‌های به‌دست آمده در

1 . NikkiVoro - Ovarov

2 . John Hall

3 . Louise Bachelier

4 . Kruisenga

قیمت گذاری اوراق اختیار معامله، برای بیش از نیم قرن مدل های اقتصادسنجی موردی<sup>۱</sup> بوده اند. (الغلیص<sup>۲</sup>، ۲۰۱۸، ص ۴۴۳) ص ۴۴۳ له دو، مدل ارائه شده توسط کاسوف<sup>۳</sup> در سال ۱۹۶۹ نمونه ای از این دست مدل ها می باشد.

$$c = x \left\{ \left[ \left( \frac{s}{x} \right)^y + 1 \right]^{\frac{1}{y}} - 1 \right\}, 1 \leq y \leq \infty \quad (2)$$

طبق این فرمول حد بالای قیمت اختیار خرید برابر با قیمت سهام و حد پایین قیمت اختیار برابر با ارزش ذاتی آن یعنی  $\text{Max}(s-x, 0)$  می باشد. پیشرفت هایی نیز در زمینه قیمت گذاری اختیار معامله در دهه ۱۹۶۰ میلادی به وقوع پیوست. یکی از مشهورترین مدل های قیمت گذاری اختیار معامله، مدل اختیار معامله بلک شولز است. این مدل در سال ۱۹۷۰ ارائه شد و با فرمولی صریح، قیمت اختیار معامله را محاسبه می کند. مدل بلک شولز مرتون، مدلی ریاضی از یک بازار مالی شامل ابزارهای سرمایه گذاری مشتقه است. از این مدل می توان فرمول بلک شولز بر اساس برآوردی نظری از قیمت اختیارات سبک اروپایی را به دست آورد. فرمول سه به فرمول بلک شولز معروف است. (جان هال، ۱۳۸۸، صص ۲۵۰-۳۸۰)

$$v_0 = v_s N(d_1) - \frac{E}{e^{rt}} N(d_2) \quad (3)$$

$$d_1 = \frac{L_n \left( \frac{v_s}{E} \right) + \left[ r + \frac{1}{2} (\delta^2) \right] t}{\delta \sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{L_n \left( \frac{v_s}{E} \right) + \left[ r - \frac{1}{2} (\delta^2) \right] t}{\delta \sqrt{t}} = d_1 - \delta \sqrt{t}$$

در این فرمول  $v_0$  ارزش یک اختیار خرید،  $v_s$  قیمت جاری سهام،  $E$  قیمت توافقی،  $r$  نرخ بهره مرکب سالانه،  $t$  زمان تا سررسید اختیار معامله،  $N(d_i)$  تابع توزیع فراوانی نرمال و  $\delta$  انحراف معیار بازده سالانه سهم است. کاربرد مفاهیم فیزیکی و ریاضی برای حل مسائل مالی مستلزم ایجاد ارتباط دقیق بین مفاهیم فیزیکی با مسائل و مشکلات مالی و اقتصادی دارد. اخیراً، پژوهشگران و تحلیلگران

1 . Adhoc Econometric Models

2 . Alghalith M

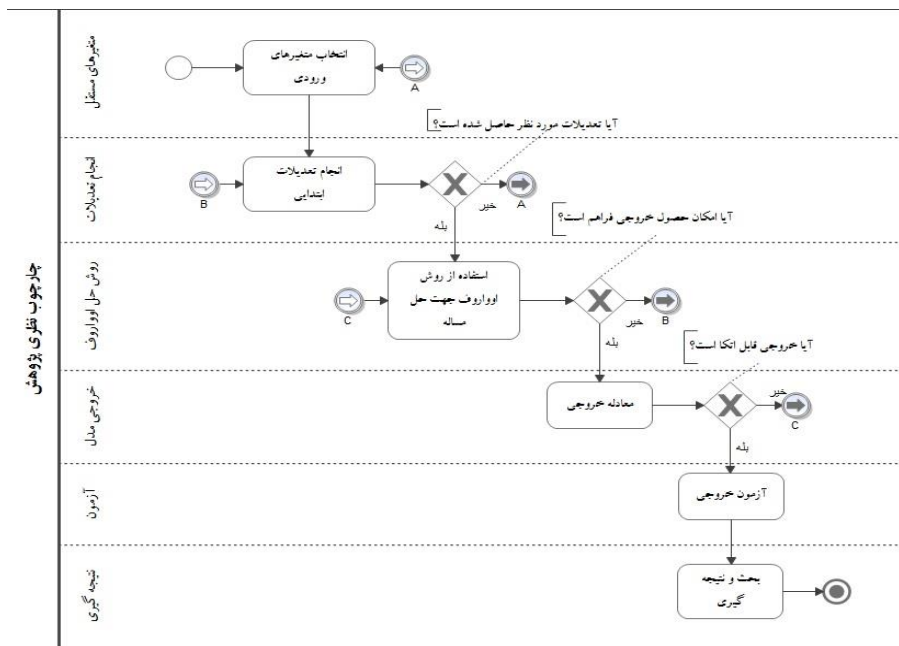
3 . Kassouf

مالی با استفاده از روش‌های پیشرفته ریاضی توانسته‌اند؛ مدل‌های نوینی طراحی کنند که در مقابل تغییرات بازار از خود واکنش نشان داده و برخی از مشکلات بازار را حل می‌نمایند. مدل‌های ریاضی همانند روش‌های شبیه‌سازی، درختی و به‌ویژه روش‌های حل دیفرانسیلی از پیشرفته‌ترین روش‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله هستند. از مشکلات مدل قیمت‌گذاری بلک‌شولز می‌توان به عدم اعلان پیوسته، فرضیات مرتبط با بازار کارا، هزینه‌های معاملات، هزینه نقد شوندگی و غیره اشاره نمود. وجود این مشکلات استفاده از مدل بلک‌شولز را با چالش مواجه کرده است. در نتیجه اقداماتی جهت بهبود مدل اصلی از طریق به‌کارگیری سایر روش‌ها در دستور کار پژوهش‌گران قرار گرفته است. با حل معادله شرودینگرگونه و حل آن به کمک روش نیکی وورو - اووارف، امکان کاهش نواقص مدل بلک‌شولز وجود داشته و زمینه‌ی توسعه و استفاده از مدل جدید در دامنه‌ی وسیع‌تری از اوراق همانند اوراق آمریکایی فراهم می‌گردد. در حل بسیاری از مسائل می‌توان از توابع خاص برای ارائه‌ی جواب‌ها استفاده کرد. توابع خاص از حل معادله دیفرانسیل‌هایی معروف همانند فوق هندسی<sup>۱</sup>، ژاکوبی<sup>۲</sup>، لژاندر<sup>۳</sup> و غیره به دست می‌آیند. روش نیکی وورو - اووارف مبتنی بر حل معادله دیفرانسیل بر اساس روش فروبینوس<sup>۴</sup> می‌باشد که منجر به توابع خاص می‌شود. از آنجایی که ویژگی‌های توابع خاص شناخته‌شده هستند، می‌توان از این ویژگی‌ها برای بررسی رفتار جواب‌های به‌دست‌آمده در مسائل استفاده نمود. روش‌ی روش‌ورو - اووارف می‌تواند به‌طور مستقیم به حل معادلات دیفرانسیل پرداخته و حتی مؤثرتر و کارآمدتر از سایر روش‌های استاندارد موجود و در دستگاه‌های مختصات مختلف، حل معادلات دیفرانسیل درجه‌دو را نتیجه دهد. این روش با حل منطقی معادلات درجه دوم، مقادیر دقیق این معادلات را مشخص می‌کند. توابع نتیجه شده از حل معادلات با این روش، متعامد می‌باشند که این مصداقی بر مفید و مؤثر بودن روش بکار رفته است. این توابع برحسب شرایط موجود در سامانه و پتانسیل در نظر گرفته‌شده به‌صورت توابع لاگر، فوق هندسی، رودریگر و غیره ظاهر می‌شوند. حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل درجه دو با روش نیکی - وورو - اووارف، قابل‌مقایسه با حل حاصل از روش‌های عددی مختلف بوده و این حاکی از میزان دقت فوق‌العاده‌ی نتایج حاصل از این روش می‌باشد. از مزیت‌های دیگر این روش آن است تابع به‌دست‌آمده برای اختیار خرید برحسب چندجمله‌ای توابع لاگر بوده که توابعی دقیق و با رفتار

- 
- 1 . Geometric method
  - 2 . Jacobi Method
  - 3 . Legendre's Method
  - 4 . Frobenius method

مشخص و معینی هستند. همچنین علاوه بر مزیت دقت و سادگی، می توان بیان داشت که برای محاسبه‌ی فرم اختیار خرید هیچ تقریبی در نظر گرفته نشده است. جنبه‌ی نوآوری ایجادشده در این پژوهش ماهیتی موضوعی، روشی و مفهومی دارد. موضوع استفاده‌شده جهت حل مسئله از طریق روش نیکی وورو - اواروف، کاملاً جدید بوده و معادله‌ی جدید نسبت به معادله‌ی بلک شولز از محدودیت‌های کمتری برخوردار می‌باشد. همچنین، نتایج حاصله‌ی آن به خروجی معادله بلک شولز نزدیک است.

منای چارچوب نظری در این پژوهش شناسایی درست متغیرها است. متغیر وابسته در این پژوهش، معادله قیمت گذاری اختیار معامله خواهد بود. متغیرهایی همانند نرخ بهره بدون ریسک، قیمت دارایی، قیمت توافقی، زمان تا سررسید و واریانس بازده دارایی، به‌عنوان متغیرهای مستقل شناخته خواهند شد. فرآیند شماره یک، چارچوب نظری این پژوهش را نشان می‌دهد.



فرآیند ۱. چارچوب نظری پژوهش

بررسی پیشینه‌ی پژوهش حاضر معطوف به مطالعه‌ی پژوهش‌های انجام‌شده در ارتباط با معادله‌ی بلک‌شولز، تغییرهای صورت گرفته پیرامون آن و درنهایت استفاده از روش‌های حل متنوع جهت ارائه‌ی معادله‌ای متفاوت از معادله‌ی بلک‌شولز استوار است.

ماتیواستارم، توماس هانگتینتون و داگلاس<sup>۱</sup> در مقاله‌ای با عنوان "استفاده از رویکرد مدل قیمت-گذاری اختیارات برای ارزیابی تصمیمات استراتژیک در محیط‌های پرتلاطم" نشان دادند؛ نسخه اصلاح‌شده از فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک‌شولز، به‌طور گسترده‌ای در مباحث مالی استفاده می‌شوند (ماتیواستارم، توماس هانگتینتون و داگلاس، ۲۰۱۷، صص ۴۳۷ - ۴۴۹).

وی‌ال خاستکویچ<sup>۲</sup> در مقاله‌ای با عنوان "یک راه حل منحصر به فرد برای معادله دیفرانسیل بلک‌شولز با مشتقات جزئی نیمه خطی برای ارزیابی دارایی‌ها در اختیارات آمریکایی" یک روش برای حل مشکل مرزی قیمت‌گذاری اختیارات بر اساس معادله بلک‌شولز در نظریه اختیارات و بر اساس نمایندگی از شرایط مرزی مشخص ارائه نمودند. نتایج امکان‌پذیر بودن حل مشکل مرزی قیمت‌گذاری را اثبات می‌کند (وی‌ال خاستکویچ، ۲۰۱۵، صص ۱۱۵۷ - ۱۱۶۴).

رومان و ایوانف<sup>۳</sup> در مقاله‌ای با عنوان "فرآیند توزیع حداکثر گامای واریانس و مسیر قیمت-گذاری اختیارات" در مورد امکان دستیابی به نتایج صریح برای فرآیند گامای واریانس بحث کردند. این مقاله یک فرآیند گاما واریانس را به‌عنوان تغییر زمان حرکت براونری بررسی می‌کند (رومان و ایوانف، ۲۰۱۵، صص ۹۷۹ - ۹۹۳).

نوآوری معاویا الغلیص<sup>۴</sup> در مقاله‌ای با عنوان "قیمت‌گذاری اختیارات: فرمول بسیار ساده" اقدام به ارائه فرمول‌های ساده‌ای نمودند که رابطه مثبت بین قیمت اختیار و نوسان و زمان بلوغ را نشان می‌دهد. (معاویا الغلیص، ۲۰۱۴، صص ۷۱ - ۷۶).

همتا و امرشی<sup>۵</sup> در مقاله‌ای با عنوان "قیمت‌گذاری اختیار کراک با کپسول"<sup>۶</sup> از این اختیار برای قیمت‌گذاری استفاده کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که همپوشانی و مدل‌های استاندارد، قیمت نامناسبی را ارائه می‌دهند و مدل کلیتون<sup>۷</sup> مناسب‌تر است. مدل آن‌ها به ادبیات مشتقات انرژی با نشان

1 . Matthew Starm, Thomas Hunstantin and Douglas

2 . Soastkitch

3 . Roman and Ivanov

4 . Moawia Alghalith

5 . Hemantha S. B. HerathEmail authorPranesh KumarAmin H. Amershi

6 . Crack spread option pricing with copulas

7 . Clayton



دادن کاربرد مدل‌های مخروطی به قیمت‌گذاری، کمک می‌کند (همنتا و امرشی، ۲۰۱۴، صص ۱۰۰ - ۱۲۱).

استیون لی<sup>۱</sup> در مقاله‌ای تحت عنوان "هزینه تلویحی تعاملات توسط مدل قیمت‌گذاری اختیارات لند"<sup>۲</sup> باهدف ارائه یک روش جایگزین برای برآورد هزینه‌های معامله در بورس از طریق هزینه‌های معامله تلویحی با استفاده از مدل قیمت‌گذاری اختیار لند اقدام نمودند. نتایج پژوهش، بررسی دقت هزینه‌های معامله تلویحی معامله‌شده در میان اختیارات بدون مالیات و بلوغ و تغییر هزینه‌های معامله معقول در دوره بحران مالی اخیر جهانی بوده است. (استیون لی، ۲۰۱۲، صص ۳۳۳ - ۳۶۰)

ژان پییر و پی تاشمن<sup>۳</sup> در مقاله‌ای با عنوان "قیمت‌گذاری اختیارات تحت مدل استرس‌نا" یک مکانیزم رژیم سوئیچینگ<sup>۴</sup> را به یک مدل قیمت‌گذاری سرمایه نسبت داده‌اند. آن‌ها دریافتند این مدل که یکی از ویژگی‌های برجسته در بازار اختیارات آتی است؛ قادر به ایجاد چولگی نوسانی می‌باشد. (ژان پییر و پی تاشمن، ۲۰۱۲، صص ۲۰ - ۱۸۲)

لی‌منگ‌می‌وانگ<sup>۵</sup> در مقاله‌ای با عنوان "مقایسه فرمول بکل شولز با فرمول بلک شولز فرکشنال"<sup>۶</sup> در بازار مشتقات بورس با تغییر نوسان<sup>۷</sup> فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله فرکشنال را با استفاده از فرمول بلک شولز اختیار معامله استنتاج کردند. نتایج آن‌ها نشان داد؛ هنگامی که نوسان‌ها کوچک‌تر است، خطای میانگین خطی تقارن بلک شولز بزرگ‌تر از مدل سنتی است. (لی‌منگ‌می‌وانگ، ۲۰۱۰، صص ۹۹ - ۱۱۱)

دودو و اسکایلت<sup>۷</sup> در مقاله‌ای با عنوان "قیمت‌گذاری اختیار معاملات آمریکایی تحت نوسان تصادفی و نرخ بهره تصادفی" رویکرد جدیدی را برای قیمت‌گذاری اختیار معاملات آمریکایی ارائه نمودند. نتایج آن‌ها نشان داد که اثرات حاصل از به‌کارگیری نرخ بهره و نوسان تصادفی قیمت‌ها در تعیین قیمت صحیح‌تر و واقعی‌تر اختیار معامله، بسیار حائز اهمیت است. (دودو و اسکایلت، ۲۰۱۰، صص ۷ - ۲۴)

- 
- 1 . Steven Li
  - 2 . Leland option pricing model
  - 3 . Jean-Pierre P. Tashman
  - 4 . regime-switching mechanism
  - 5 . Li MengMei Wang
  - 6 . Fractional
  - 7 . Doodo and Skylight

دی‌مادان<sup>۱</sup> در مقاله‌ای با عنوان "ترکیب فرمول‌های بلک‌شولز با حرکت براونین و اتصال محدود" برخی از روابط جالب بین فرمول بلک‌شولز و آخرین پیام‌های نمایشی براونین را کشف کردند. از نتایج این پژوهش فرمول یوری مشتق شده است. (دی‌مادان، ۲۰۰۸، صص ۹۷-۱۱۵)

کریستوفرسن و همکاران<sup>۲</sup> در مقاله‌ای با عنوان "تعیین قیمت اختیار معامله با مؤلفه‌های نوسان کوتاه‌مدت و بلندمدت" مدل جدیدی برگرفته از مدل انجل و لی<sup>۳</sup> (۱۹۹۹) و هستون و نندی<sup>۴</sup> (۲۰۰۰) برای ارزش‌گذاری اختیار معاملات اروپایی ارائه نمودند. مدل پیشنهادی آن‌ها امکان قیمت‌گذاری آسان‌تر اختیار معاملات اروپایی را ممکن ساخت. (کریستوفرسن و همکاران، ۲۰۰۸، صص ۸-۱۵)

ژوچنگ و ژیان‌پینگ‌وان<sup>۵</sup> در مقاله‌ای با عنوان "قیمت‌گذاری اختیارات برای تغییر مسیر نمایی لوی مدل تحت مم" <sup>۶</sup> مطالعه و ارزیابی منطقی قیمت اختیار اروپایی هنگامی که فرآیند قیمت اساسی با تغییر فرآیند لوی تغییر می‌کند؛ را بررسی کردند. نتایج آن‌ها ارائه فرمول قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت اندازه‌گیری حداقل مارتینگال آنتروپی<sup>۷</sup> بوده است (ژوچنگ و ژیان‌پینگ‌وان، ۲۰۰۷، صص ۶۵۱-۶۶۴).

خلیلی عراقی و همکاران در پژوهشی با عنوان "قیمت‌گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون" با ورود عامل تلاطم در مدل قیمت‌گذاری با استفاده از مدل هستون، مدلی کارا تر برای قیمت‌گذاری اوراق ارائه نمودند. نتایج پژوهش مؤید این نکته می‌باشد که تفاوت معناداری بین مدل هستون و مدل رایج قیمت‌گذاری اوراق در بورس اوراق بهادار وجود داشته است (خلیلی عراقی و همکاران، ۱۳۹۵، صص ۷-۱۶).

جلوداری ممقانی و پیکر در مقاله‌ای تحت عنوان "محاسبه ارزش اختیار با استفاده از روش گیلز" به کاربرد هم‌زمان روش وابسته به مسیر برای شبیه‌سازی و برآورد تابع عایدی پرداختند. نتایج نشان داد که استفاده از روش آلا رگانندو<sup>۸</sup> در صورت امکان، به نتایج بهتری می‌انجامد. (جلوداری ممقانی و پیکر، ۱۳۹۱، صص ۸-۱۵)

- 
- 1 . D. Madan
  - 2 . Christopherson et al
  - 3 . Engle and Lee
  - 4 . Heston and Nandi
  - 5 . Zhucheng and Jian Ping Wan
  - 6 . Lévy Model Under Memm
  - 7 . Martigal Entropy
  - 8 . Alargando

خضری پور قرایی و ستار دباغی در مقاله‌ای با عنوان "یک روش عددی مبتنی بر تفاضات متناهی صریح برای حل معادله غیرخطی بلک شولز" اثر بازارهای غیر نقدی در ارزش اختیار معامله را بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که برای موارد غیرخطی، یعنی ارزش‌گذاری اختیار معامله با وجود تغییر قیمت، روش عددی تفاضات متناهی صریح، جواب عددی قابل قبولی را فراهم می‌آورد. (خضری پور قرایی و ستار دباغی، ۱۳۹۱، صص ۶-۱۷)

شاگران در مقاله‌ای تحت عنوان "روش عددی جدید برای ارزش‌گذاری اختیار معاملات آمریکایی" از مدل تلاطم تصادفی هستون<sup>۱</sup> استفاده نمود. آزمون‌های عددی نشان‌دهنده صحت و دقت روش عددی جدید معرفی شده در این مقاله می‌باشد. بهبود مدل لانگ استف و شوارتز<sup>۲</sup> با کاهش زمان محاسباتی و تورش قیمت‌گذاری، نتیجه این پژوهش بوده است (شاگران، ۱۳۹۱، صص ۳-۱۸).

زمانی و زرگری طی پژوهشی تحت عنوان "یک شمای تفاضات متناهی برای محاسبه قیمت اختیار در مدل تلاطم تصادفی" اشاره داشته‌اند که در مدل تلاطم تصادفی، قیمت اختیارهای اروپایی، جواب یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای سهموی است. نتایج نشان داد که در مدل‌های تلاطم تصادفی، بازار کامل نیست و در این بازارها نمی‌توان ریسک را کاملاً پوشش داد. (زمانی و زرگری، ۱۳۸۷، صص ۷-۲۰)

چنانچه ملاحظه گردید؛ در تمام پژوهش‌ها از روش بلک شولز استفاده شده و این مدل ضمن دارا بودن محدودیت‌های مالی، زمینه بهبود و بررسی مجدد را دارا می‌باشد. ما قصد داریم بررسی کنیم که آیا می‌شود با استفاده از معادله‌ای دیگر که محدودیت کمتری دارد، به نتیجه‌ای متفاوت دست یافت؟

### فرضیه‌های پژوهش

با حل معادله‌ی شرودینگرگونه اصلی بلک شولز به کمک روش نیکی وورو - اوواروف، می‌توان به فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله دست یافت.

بین خروجی مدل جدید ارائه شده و مدل اصلی بلک شولز تفاوتی وجود ندارد.

### روش‌شناسی پژوهش

ما درصدد ارائه‌ی مدلی جدید برای قیمت‌گذاری اختیار معامله هستیم. از منظر هدف اجرا، این پژوهش ماهیتی بنیادی و کاربردی دارد (علی دلاور، ۱۳۷۳، صص ۱۱۰-۲۵۰). در بخش بنیادی،

1 . Heston Stochastic Volatility Model

2 . Longstaff FA & Schwartz ES

ارائه‌ی مدل متفاوتِ معادله‌ی بلک‌شولز بررسی شده و در حوزه‌ی کاربردی، امکان بهره‌گیری از این مدل و مقایسه آن با مدل اصلی بلک‌شولز به منظور استفاده در بازارهای مالی بررسی می‌گردد. جهت ارائه مدلی کاراتر، ضمن بهره‌گیری از روش نیکی وورو - اوواروف، امکان استفاده از این روش جدید را فراهم می‌نماییم. در ادامه با به کارگیری ابزارهایی همانند نرم‌افزارهای ماتیماتیکا<sup>۱</sup> و اس-پی‌اس‌اس<sup>۲</sup>، امکان مقایسه‌ی نتایج فراهم می‌گردد. در حوزه‌ی نظری، متغیرهای قابل تعریف شامل ابزار مشتقه و اختیار معامله می‌باشند. اوراق مشتقه در مباحث مالی ابزاری هستند که ساختار پرداخت و ارزش آن‌ها از ارزش دارایی پایه و شاخص‌های مربوطه نشأت می‌گیرند. اختیار معامله قراردادی قانونی است که توسط یک فروشنده به یک خریدار در ازای مبلغ معینی فروخته می‌شود. قراردادهای اختیار خرید و فروش<sup>۳</sup>، به دارندگان این حق را می‌دهند تا دارایی را در تاریخی معین و به قیمت مشخصی خریداری و یا به فروش برسانند. در حوزه‌ی عملیاتی مفاهیمی قابل تعریف عبارت‌اند از:

**معادله شرودینگر:** معادله‌ای است که چگونگی تغییر حالت کوانتومی یک سامانه فیزیکی با زمان را توصیف می‌کند؛ (الغیض، ۲۰۱۸، ص ۴۴۳)

**معادله بلک‌شولز:** برآوردی نظری از قیمت اختیارات سبک اروپایی است؛ (همنتا و امرشی<sup>۵</sup>، ۲۰۱۳، صص ۱۰۰ - ۱۲۱)

**روش نیکی وورو - اوواروف:** بر اساس حل عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با توابع خاص بنا شده است؛ چند جمله‌ای لاگرنر: در ریاضیات، جواب‌های معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم  $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$  (استیون‌لی، ۲۰۱۲، صص ۳۳۳ - ۳۶۰)

در خصوص گردآوری اطلاعات مربوط به ادبیات موضوع و پیشینه پژوهش از روش کتابخانه‌ای و جهت جمع‌آوری اطلاعات برای تأیید یا رد فرضیه‌های پژوهش از روش میدانی استفاده گردید. با لحاظ محدودیت استفاده از اوراق مشتقه در بازار ایران، فرابورس به‌عنوان جامعه آماری انتخاب و اطلاعات معاملات مشتقه سکه محدود به بازه زمانی ۱۳۹۴ لغایت ۱۳۹۷ به‌عنوان نمونه آماری در این مقاله لحاظ گردید. از منظر روش آماری، پژوهش حاضر از نوع استنباطی می‌باشد. (غلامرضا خاکی، ۱۳۹۰، صص ۹۰ - ۲۱۰)

- 
- 1 . Mathematica
  - 2 . SPSS
  - 3 . Call Option
  - 4 . Put Option
  - 5 . Hemantha, Amershi

### تجزیه و تحلیل داده‌ها و آزمون فرضیه‌ها

سیر ارائه‌ی مطالب در این قسمت، شامل چگونگی اثبات و ارائه‌ی معادله‌ی جدید بلک شولز و سپس آزمون فرضیه‌ها و پاسخگویی به سؤالات پژوهش خواهد بود. معادله‌ی دیفرانسیل جزئی و اصلی بلک شولز به شرح معادله ۴ می‌باشد (کریستوفرسن و جاکوب<sup>۱</sup>، ۲۰۰۸، صص ۸-۱۵).

$$\frac{\partial p}{\partial t} + rs \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\sigma^2 s^2 \partial^2 p}{2 \partial s^2} - \gamma p = 0 \quad (۴)$$

در این معادله  $p$  قیمت اختیار خرید،  $r$  نرخ بدون ریسک،  $s$  قیمت پایه دارایی،  $t$  زمان تا سررسید و  $\delta$  انحراف معیار قیمت دارایی می‌باشند. (مادان<sup>۲</sup>، ۲۰۰۸، صص ۹۷-۱۱۵) در ادامه‌ی حل معادله ۴ می‌توان بدین گونه رفتار کرد:

$$p = e^{(r-\gamma)(T-t)} f(s) N(d_1) - e^{-\gamma(T-t)} KN(d_2) \quad (۵)$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}} \quad (۶)$$

$$d_1 = \frac{\left( \ln\left(\frac{s}{k}\right) + \left(r_f + \frac{\delta^2}{2}\right)t \right)}{\delta\sqrt{(T-t)}} \quad (۷)$$

$$d_2 = \frac{\left( \ln\left(\frac{s}{k}\right) + \left(r_f - \frac{\delta^2}{2}\right)t \right)}{\delta\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \delta\sqrt{T-t} \quad (۸)$$

با جایگذاری معادله ۵ در معادله ۴ ما به دست آوردیم:

$$N(d_1)e^{(T-t)(r-\gamma)} \left( 2rf(s) - 2rsf'(s) - s^2\delta^2 f''(s) \right) = 0 \quad (۹)$$

بنابراین معادله مربوط به  $f(s)$  به صورت معادله ۱۰ می‌باشد:

$$f''(s) + \frac{2r}{\delta^2 s} f'(s) - \frac{2r}{s^2 \delta^2} f(s) = 0 \quad (۱۰)$$

با معرفی تبدیلی به شرح معادله‌ی ۱۱:

1 . Christoffersen and Jacob

2 . Madan

$$f(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} u(s) \quad (11)$$

ما به معادله‌ای بر حسب  $u$  به صورت معادله ۱۲ دست یافتیم:

$$u'' - \frac{b}{s^2} u = 0 \quad (12)$$

که در آن  $b$  برابر است با:

$$b = \frac{r^2 + r \delta^2}{\delta^4} \quad (13)$$

اگر معادله ۱۲ را با روش پارامتری نیکی وورو - اوواروف حل کنیم؛  $u$  به صورت معادله ۱۴ خواهد شد. (پی‌نوشت الف و ب)

$$u = s^{\frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}} \quad (14)$$

با جایگذاری معادله ۱۴ در معادله ۱۱، حالت‌های  $f_1(s)$  و  $f_2(s)$  به صورت معادله ۱۵ و ۱۶ خواهند بود:

$$f_1(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} u_1(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} s^{-\frac{1 + \sqrt{1+4(r^2+r\delta^2)}}{\delta^4}} = s \quad (15)$$

$$f_2(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} u_2(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} s^{-\frac{1 - \sqrt{1+4(r^2+r\delta^2)}}{\delta^4}} = s \quad (16)$$

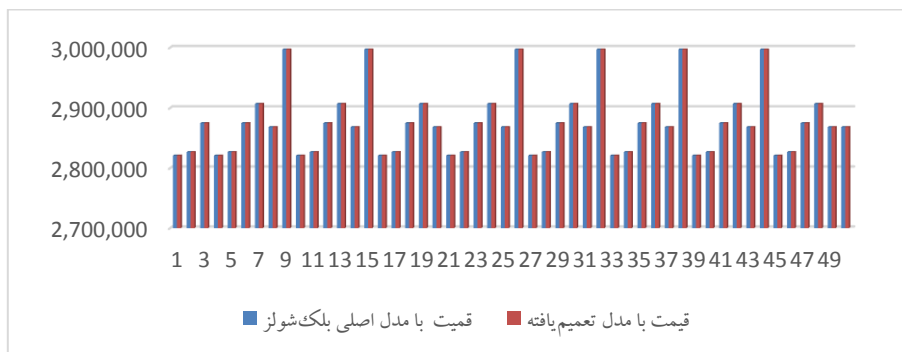
ما فرم نهایی  $f(s)$  را به صورت ترکیبی خطی از  $f_1(s)$  و  $f_2(s)$  ارائه کردیم.

$$f(s) = c_1 s^{-\frac{2r}{\delta^2}} + c_2 s. \quad (17)$$

ما پیشنهاد می‌دهیم که  $c_1 = c_2 = 1$  است. با جایگذاری معادله ۱۷ در معادله ۴ داریم:

$$p = e^{(r-\nu)(T-t)} \left( s^{-\frac{r}{\delta^2}} + s \right) N(d_1) - e^{-\nu(T-t)} KN(d_2) \quad (18)$$

در مدل اصلی بلک شولز،  $f(S)$  شامل فقط بخش خطی بود. در حالی که در مدل پیشنهادی این پژوهش، ما  $S^{-\frac{r}{\delta^2}}$  را برای کلیه دوره‌ها بکار بردیم. حال با ارائه‌ی معادله‌ی جدید، امکان آزمون مدل پیشنهادی با مدل اصلی فراهم می‌گردد. با توجه به نوپا بودن استفاده از معاملات اختیار معامله و همچنین محدودیت تنوع کالایی این ابزار در ایران، اطلاعات ۵۰ اختیار معامله سکه طلا از فرابورس ایران محدود به بازه زمانی ۱۳۹۴ لغایت ۱۳۹۷ اخذ و جهت آزمون مدل اصلی و تعمیم یافته مورد استفاده قرار گرفت. در این راستا ابتدا، اطلاعات ورودی شامل قیمت‌های پایه دارایی از ۲۸,۲۱ – ۲۹,۰۷ میلیون ریال، انحراف معیار نوسان قیمت سکه ۳,۷۸۸ درصد، نرخ بازده بدون ریسک ۱۵ درصدی، زمان تا سررسید ۰,۰۸ – ۰,۵ سال و قیمت اعمال بین ۱۵,۵ – ۳۰,۵ میلیون ریال در مدل جدید و مدل اصلی بلک شولز اعمال و سپس قیمت‌های خروجی حاصله، مورد مقایسه قرار گرفتند. نمودار یک قیمت‌های محاسبه شده را نشان می‌دهد.



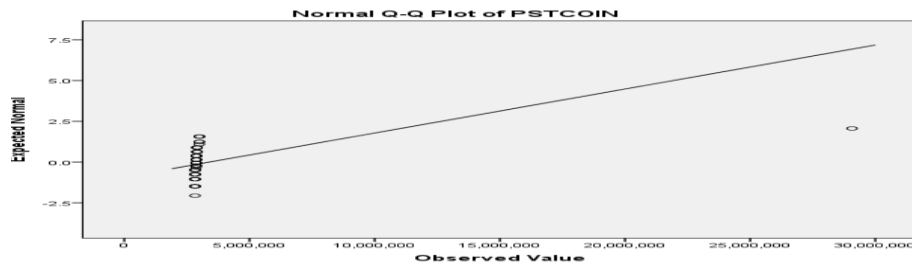
نمودار ۱. تفاوت قیمت‌های حاصله بر اساس مدل اصلی و تعمیمی بلک شولز

در ادامه، نتایج آزمون نرمال بودن (کولموگروف اسمیرنوف) قیمت‌های حاصله بر اساس مدل اصلی بلک شولز به شرح جدول ۱ می‌باشد:

جدول ۱. آزمون نرمال بودن قیمت‌های خروجی مدل استاندارد

	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
PSTCOIN	.523	50	.000	.134	50	.000

اطلاعات جدول ۱، ( $sig = 0 < 0.05$ ) نشان دهنده نرمال نبودن نتایج حاصل از به کارگیری معادله استاندارد بلک شولز دارد. این مهم در نمودار شماره ۲ نشان داده شده است. ب برای این فرض نرمال بودن نتایج حاصل از به کارگیری مدل استاندارد در سطح اطمینان ۹۵ درصد قابل پذیرش نیست.



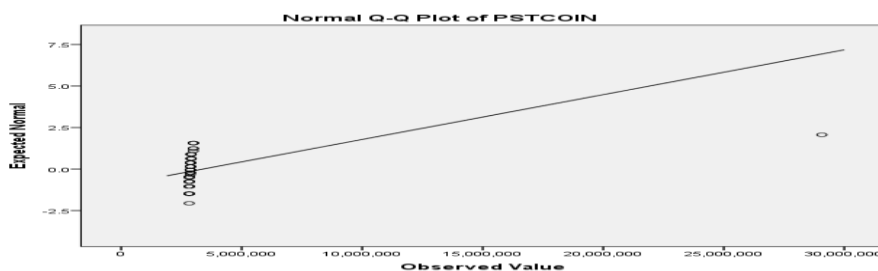
نمودار ۲. آزمون نرمال بودن قیمت های مدل اصلی

در ادامه آزمون نرمال بودن قیمت های حاصل از به کارگیری مدل تعمیم یافته اجرا شده و نتایج ارزیابی به شرح جدول شماره ۲ ارائه می گردند:

جدول ۲. آزمون نرمال بودن نتایج مدل پیشنهادی

	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
PSUCOIN	.523	50	.000	.134	50	.000

اطلاعات جدول ۲، ( $sig = 0 < 0.05$ ) نشان دهنده نرمال نبودن نتایج حاصل از به کارگیری معادله تعمیم یافته دارد. این مهم در نمودار ۳ نشان داده شده است.



نمودار ۳. آزمون نرمال بودن قیمت های مدل پیشنهادی



بنابراین فرض نرمال بودن نتایج حاصل از به کارگیری مدل پیشنهادی در سطح اطمینان ۹۵ درصد قابل پذیرش نیست. با توجه به عدم پذیرش فرض نرمال بودن دو گروه مورد بررسی، آزمون ناپارامتریک من ویتنی جهت ارزیابی دو گروه انتخاب گردید. در ادامه، آزمون برابری واریانس ها به شرح جدول ۳ ارائه می گردد:

جدول ۳. آزمون برابری واریانس دو گروه استاندارد بلک شولز و مدل پیشنهادی (اختیار سکه)

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	.000	1	.000	.000	1.000
Within Groups	1345160031748280.200	98	13726122772941.635		
Total	1345160031748280.200	99			

با توجه به ( $sig = 1$ ) فرض برابری واریانس ها در سطح اطمینان ۹۵ درصد مورد پذیرش قرار می گیرد. نتایج حاصل از ارزیابی آزمون من ویتنی به شرح جدول ۴ می باشد:

جدول ۴. نتایج آزمون من ویتنی دو گروه استاندارد و پیشنهادی (اختیار سکه)

Mann-Whitney U	1250.000
Wilcoxon W	2525.000
Z	.000
Asymp. Sig. (2-tailed)	1.000

با توجه به ( $sig = 1 > 0.05$ ) در سطح اطمینان ۹۵ درصد فرضیه اصلی پژوهش که مبتنی بر عدم وجود اختلاف معنادار بین نتایج مدل اصلی بلک شولز و مدل پیشنهادی و تعمیم یافته است؛ مورد تأیید قرار می گیرد.

### آزمون فرضیه ها

**فرضیه اول:** با حل معادله‌ی شرودینگر گونه اصلی بلک شولز به کمک روش نیکی وورو - اوواروف، می توان به فرمولی متفاوت برای قیمت گذاری اختیار معامله دست یافت. با اثبات و ارائه‌ی معادله‌ای متفاوت (معادله ۱۸)، فرضیه اول این پژوهش مورد تأیید قرار گرفت. در واقع روش حل و اثبات ارائه شده، مؤید امکان به روزرسانی معادله‌ی بلک شولز با معادله‌ی جدید می باشد.

**فرضیه دوم:** بین خروجی مدل جدید ارائه‌شده و مدل اصلی بلک شولز تفاوتی وجود ندارد. با استناد به نتایج حاصل از آزمون آماری ناپارمتریک من‌ویتنی بین مدل جدید و مدل اصلی بلک شولز، فرضیه دوم این پژوهش در سطح اطمینان ۹۵ درصد مورد تأیید قرار می‌گیرد.

### نتیجه‌گیری و بحث

مدل ارائه‌شده می‌تواند به‌عنوان ابزاری مفید جهت قیمت‌گذاری صحیح‌تر اوراق اختیار معامله توسط فعالان بازارهای مالی استفاده گردد. تحلیل گران مالی به‌ویژه ارزش‌گذاران اختیار معامله، فعالان بازارهای سرمایه و مشاوران مالی که به دنبال محاسبه‌ی قیمت اختیار معامله هستند؛ کاربران اصلی این مقاله می‌باشند. نتیجه‌ی حاصله مؤید آن است که ما با حل معادله‌ی شرودینگرگونه اصلی به روش نیکی وورو - اواروف، به فرمی صریح و جدید از معادله‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله دست یافتیم. نتیجه‌ی دیگر بیانگر آن است که نتایج قیمت‌گذاری بر اساس معادله‌ی جدید به قیمت حاصله بر مبنای روش بلک شولز نزدیک بوده و این تفاوت در مقادیر بالای معامله‌های اختیار معامله پرنسب خواهد بود. ما با بهبود مدل قیمت‌گذاری بلک شولز از این طریق، امکان استفاده از معادله‌ی جدید جهت قیمت‌گذاری صحیح‌تر قراردادهای اختیار معامله را فراهم کردیم. نتایج این پژوهش با نتایج پژوهش ماتيو استارم، توماس هانگیتون و داگلاس (۲۰۱۷) که نشان دادند نسخه اصلاح‌شده از فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک شولز، به‌طور گسترده‌ای در حوزه مالی قابلیت استفاده دارند؛ همخوان می‌باشد. همچنین ارائه‌ی معادله‌ی متفاوت بلک شولز صورت گرفته در این پژوهش، نتایج پژوهش وی‌ال خاستکوپیچ<sup>۱</sup> (۲۰۱۵) را تأیید می‌نماید. نتایج صورت پذیرفته با انتخاب و تعدیل متغیرهای ورودی واقعی‌تر و با رویکرد الغلیص (۲۰۱۸) برای قیمت‌گذاری اختیار معاملات آمریکایی مطابقت دارد. اگرچه خروجی این پژوهش نشان‌دهنده‌ی عدم وجود تفاوت معنادار بین مدل اصلی و مدل جدید می‌باشد؛ ولیکن دو نکته پیرامون آن حائز اهمیت می‌باشد. اولاً، این عدم تفاوت می‌تواند نشان‌دهنده‌ی اعتبار مدل جدید باشد. همان‌طور که مدل اصلی دارای وجهت علمی در بین متخصصان مالی بوده، خروجی یک معادله جدید که تفاوت معناداری با مدل اصلی استاندارد ندارد، می‌تواند به اعتبار مدل جدید کمک نماید. ثانیاً، با توجه به وجود تفاوت بسیار جزئی، این تفاوت در مبالغ بالای معامله‌های اختیار بین‌المللی (برای مثال چند میلیارد دلار و بالاتر) حائز اهمیت بوده و می‌توان ادعا نمود که برتری استفاده از مدل جدید در مقایسه با مدل اصلی اهمیت دوچندانی پیدا نموده و با افزوده شدن ارزش معامله‌ی پایه، اهمیت این تفاوت دوچندان خواهد بود. در ادامه پیشنهاد می‌گردد؛ بهبود این معادله از طریق به‌کارگیری روش‌های حل مشابه

همانند ابرتقارنی<sup>۱</sup>، روش های حدسی<sup>۲</sup>، روش های ساختن توابع فوق هندسی<sup>۳</sup> و روش تکرار محدودسازی<sup>۴</sup> بررسی گردند. بررسی مدل ارائه شده با جامعه و نمونه آماری متفاوت، حوزه ی جغرافیایی جدید، ابعاد زمانی متفاوت و به کارگیری اطلاعات سایر بازارهای اختیار همانند بازار اختیار زعفران و غیره پیشنهاد می گردند. استفاده از این روش می تواند در زمینه هایی همانند آزمایش کارایی استراتژی های بدره دینامیک<sup>۵</sup>، ایمن سازی تصادفی<sup>۶</sup> و توصیه زمان بندی بازار<sup>۷</sup> مؤثر واقع افتد. همچنین قابلیت بهبود مدل جدید جهت استفاده در قیمت گذاری انواع گوناگون اختیار معامله همانند اوراق آمریکایی از دیگر کاربردهای آتی آن می باشد.

- 
- 1 . Supersymmetric method
  - 2 . Guessing methods
  - 3 . Methods of making superhomogeneous functions
  - 4 . Repeat Restriction Method
  - 5 . Dynamic Portfolio Strategis
  - 6 . Contingent Immunization
  - 7 . Market Timing Advice

### منابع

- خلیلی عراقی مریم و همکاران. (۱۳۹۵). "قیمت گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون". *پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه علوم تحقیقات تهران*، صص ۳۰ - ۸۰.
- جلوداری ممقانی پیکر. (۱۳۹۱). "محاسبه ارزش اختیار به روش گیلز". *پژوهش نامه اقتصادی، تهران*، صص ۸-۱۵.
- خضری پور قرایی، رشید ستارداغی، صفا و قاسمی. (۱۳۹۱). "یک مقایسه از روش های شبیه سازی مونت کارلو و تفاضلات متناهی در ارزش گذاری اختیار معاملات توأم با مانع دوتایی در حالت گسسته". *سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، تهران*، صص ۱۲ - ۲۱.
- سروستانی سلیمانی. ابراهیمی. (۱۳۹۱). "روش درخت دوجمله ای برای قیمت گذاری اختیارات آسیایی در مدل پرش". *سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، تهران*، صص ۸-۱۳.
- خاکی غلامرضا. (۱۳۹۱). "روش پژوهش با رویکردی به پایان نامه نویسی". تهران، انتشارات بازتاب چاپ سوم.
- هال جان. (۱۳۸۸). "مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک". ترجمه سجاد سیاح و علی صالح آبادی، تهران، چاپ دوم، شرکت کارگزاری مفید.
- دلاور علی. (۱۳۷۳). "روش های پژوهش در روان شناسی و علوم تربیتی". تهران، مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه پیام نور، چاپ پنجم.
- Khalili, Iraqi, M., et al. (2016). *Pricing of subordinate bonds using the Heston model*. (Unpublished master's thesis). Islamic Azad University, Science and Research Branch, Iran. (in Persian)
- Jelodari Mamaghani, M. (1391). Calculation of validity values by giles method. *Economic Research*, 8-15. (in Persian)
- Khedzipour, Gharei, Stockbaghi, & Rashid. (2012). A comparison of the Monte Carlo simulation methods and finite differences in the valuation of discrete double-ended dummy transactions. *Third Conference on Mathematical Finance and Applications, Tehran, 12-21*. (in Persian)
- Sarvestani, Khadija, Soleimani, & Ebrahimi. (2012). Binomial tree method for pricing Asian options in jump model. *Third Conference on Mathematical Finance and Applications, Tehran*, 8-13. (in Persian)
- Khaki, G. (2012). *Research method with a thesis approach* (3<sup>rd</sup> ed.). Tehran, Iran: Baztab Publishing House. (in Persian)
- Hall, J. (1388). *Fundamentals of Financial Engineering and Risk Management*". Translation by Sajjad Seyah and Ali Saleh Abadi, Tehran, Second Edition, Brokerage Company. (in Persian)

- Delawar, A. (1994). *Research methods in psychology and educational sciences* (5<sup>th</sup> ed.). Tehran, Iran: Payame Noor University Press and Publishing Center. (in Persian)
- Alghalith, M. (2018). Pricing the American options using the Black-Scholes pricing formula. *Physica A*, 443 -450.
- Sturm, Matthew., Goldstein, Henry. Huntington, Thomas. (2017). Using the pricing model approach to assess strategic decisions in turbulent environments: Black Scholes and airborne changes. *Climatic Change*, 2, 437-449.
- Ivanov, R. (2015). The maximum gamma-ray variance distribution process and the pricing path of the options. *European Finance*, 2, 979-993.
- Alghalith, M. (2014). Pricing options: A very simple formula. *Dorsoduro*, 20(2), 71-73.
- Kumar, S., Kumar, D., & Singh, J. (۲۰۱۴). Numerical computation of fractional Black-Scholes equation arising in financial market. *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, 1(3-4), 177-183.
- Hemantha, A. (2013). Pricing the option of expanding crack with capsules". *European Finance*. 37(1), 100-121.
- Kumar, V. (2013). Experimental competition in pricing options. *School of Management*, Volume, 19(2), 129-156.
- Li, S. (2012). The implicit cost of interactions by the pricing model of lelend's powers. *Mathematical Sciences*, 18(4), 333-360.
- Jean-Pierre, P., & Tashman, A. (2012). Option pricing under the beta stress model. *Annals of Finance*, 8(2-3), 1-21.
- Meng, L., & Wang, M. (2010). Comparison of the Beckhelsell formula with the frequency Black-Scholes formula in the exchange derivatives market by changing the oscillation. *Basic and Applied Sciences*, 99-111.
- Ahn, J., Kang, S., & Kwon, Y. H. (2010). A Laplace transform finite difference method for the Black-Scholes equation. *Mathematical and Computer Modelling*, 5, 247-255.
- Bohner, M., & Zheng, Y. (2009). On analytical solutions of the Black-Scholes equation. *Applied Mathematics Letters*, 22(3), 309-313.
- Madan, M. (2008). Combination of Black Schulz formulas with Brownian motion and limited connections. *Applied Mathematics*, 15(2), 97-115.
- Broadie, M., & Jain, A. (2008). Key variables fluctuations in pricing models of transaction options and risk management. *Economics and Organization*, 7(4), 7-24.
- Christoffersen, P., Jacobs, K., & Ornthalalai, C. (2008). Option valuation with long-run and short-run volatility components. *Journal of Financial Economics*, Vol. 90, No. 3, pp. 272-297
- Chen, X., & Wan, J.-P. (2007). Pricing options to change the route of the Levy model under the MEM. *Mathematical Statistics*, 23(4), 651-664.

- Olga, S. (2007). The approximation of solutions and derivatives to the Black-Scholes equation doubles with unhealthy initial data. *Engineering Sciences*, 47(3), 442-462.