Research Paper

Journal of Financial Management Strategy
Vol. 7, No.27
Winter 2019

Alzahra University- Faculty of Social Sciences and Economics
Received: 2019/09/23
Accepted: 2019/12/09

Enhanced Index Tracking with a Two-Stage Mixed Integer Programing Model and Pattern Search Algorithm

Hojat Ansari[1], Adel Behzadi[2]. Farid Tondnevis[3]

Abstract

Index tracking is an important issue in portfolio theory. Index tracking is a passive approach in the portfolio optimization problem based on which finite stock should be selected to track the benchmark index. Enhanced index tracking is a selection of the portfolio with limited stock so that its return is maximized and track error is minimized without buying all stock in benchmark portfolio. The main aim of this paper was to propose a two-stage mixed integer model for enhancing portfolio performance. In order to show the approach performance, top 50 companies were traced. Return, tracking error, excess return and information ratio were used as Portfolio performance measurement. Genetic Algorithm and Pattern Search Algorithm were also used to solve the models. The findings showed that the two-stage model was better than one stage model. Likewise, pattern search enjoyed higher performance than Genetic Algorithm in the two-stage model. Therefore, two-stage model had higher performance during pattern search algorithm compared to one stage model or Genetic algorithm.

Keywords: Enhanced index tracking, Mixed Integer optimization, Two Stage portfolio performance measure, Pattern Search Algorithm.

JEL: G31, G35

---

[1] Assistant Prof., Alzahra University, Tehran, Iran, Email:hjtansari@gmail.com
[2] . Ph.D. Student in financial engineering, Faculty of Management University of Tehran, Iran, Email:adel.bh145@gmail.com
[3].Ph.D. Student in finance, Faculty of Management University of Tehran, Iran, Email:farid_ftnk@yahoo.com

راهبرد مدیریت مالی
سال هفتم، شماره بیست و هفتم
زمستان ۱۳۹۸
صص ۲۳-۱

مقاله پژوهشی

دانشگاه الزهرا (س)
دانشکده علوم اجتماعی و اقتصادی
تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۰۱
تاریخ تصویب: ۱۳۹۸/۰۹/۱۸

ردیابی شاخص بهبودیافته دو مرحله‌ای با استفاده از الگوریتم‌های فرا ابتکاری[۱]

حجت انصاری[۲]، عادل بهزادی[۳]، فرید تندنویس[٤]

چکیده

ردیابی شاخص درواقع شکل ایجاد سبد سهامی متشکل از تعداد محدودی سهم است که هدف از تشکیل این سبد سهام، ایجاد روند بازدهی مشابه با شاخص می‌باشد. منظور از ردیابی شاخص بهبودیافته، ایجاد پرتفویی با بازده بالاتر نسبت به بازده شاخص در کمترین سطح خطای ردیابی بدون خریدن تمامی سهام موجود در شاخص می‌باشد. هدف از نگارش مقاله پیش‌رو، ارائه مدلی دو مرحله‌ای بر اساس برنامه‌ریزی ترکیبی عدد صحیح است که عملکرد پرتفوی را نسبت به روش یک مرحله‌ای بهبود بخشد. مرحله اول از این مدل دو مرحله‌ای مربوط به کمینه‌سازی خطای ردیابی و مرحله دوم مربوط به بیشینه‌سازی بازده تحت مقادیر تلورانس مجاز برای خطای ردیابی می‌باشد. برای نشان دادن کارایی مدل پیشنهادی از شاخص ۵۰ شرکت فعال بورس اوراق بهادار تهران استفاده‌شده است. در بعد حل مسئله از الگوریتم جستجوی مستقیم و ژنتیک استفاده‌شده است. معیارهای ارزیابی عملکرد پرتفوی مورداستفاده در این پژوهش شامل میانگین بازدهی، خطای ردیابی، بازده اضافی و نسبت اطلاعاتی می‌باشد. یافته‌های پژوهش نشان‌گر عملکرد بهتر مدل دو مرحله‌ای پیشنهادی نسبت به مدل یک مرحله‌ای می‌باشد. همچنین با استفاده از مقایسه‌ی معیارهای ارزیابی، کارایی الگوریتم جستجوی مستقیم نشان داده شده است.

واژه های کلیدی: ردیابی شاخص بهبودیافته، بهینه‌سازی ترکیبی عدد صحیح، بهینه‌سازی دو مرحله‌ای، الگوریتم جستجوی مستقیم.

طبقه‌بندی موضوعی: G31, G35

---

۱. کد DOI مقاله: 10.22051/jfm.2019.24888.1998

۲. استادیار مدیریت، دانشگاه الزهرا، تهران، ایران، Email:hjtansari@gmail.com

۳. دانشجوی دکترای مهندسی مالی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران نویسنده مسئول ، Email:adel.bh145@gmail.com

٤. دانشجوی دکترای مالی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران، Email:farid_ftnk@yahoo.com

مقدمه

منظور از بهینه‌سازی پرتفوی، انتخاب سبد سهام متشکل از دارایی‌ها می‌باشد به‌نحوی‌که مطلوبیت سرمایه‌گذار بیشینه گردد. ردیابی شاخص یکی از مسائل موردعلاقه پژوهشگران در حوزه مدیریت پرتفوی سهام می‌باشد. ردیابی شاخص به معنی تشکیل پرتفویی از سهم‌های یک شاخص که بتواند عملکرد شاخص را بازسازی نماید- بدون اینکه تمامی دارایی‌های تشکیل‌دهنده آن شاخص خریداری شود- می‌باشد. فعالیت صندوق‌های شاخصی از دهه هفتاد میلادی شروع‌شده و از آن زمان این صندوق‌ها سهم از بازار خود را افزایش داده‌اند. استراتژی ردیابی شاخص به‌نوعی رویکرد غیرفعال[1] محسوب می‌شود که در این رویکرد سرمایه‌گذار از انعطاف‌پذیری کمتری برخوردار است و سعی می‌کند بر مبنای مجموعه‌ای از ضوابط از پیش تعیین‌شده عمل نماید.

مدیریت غیرفعال پرتفوی در تقابل با استراتژی فعال مدیریت پرتفوی[2] است که از انعطاف‌پذیری بالایی برخوردار است و سعی می‌کند در طول زمان سهم‌هایی که عملکرد بهتری نسبت به سایر سهم‌ها خواهند داشت را شناسایی نماید. فرض اساسی در این روش آن است که تجربه‌ها و قضاوت‌های شخصی مدیران سرمایه‌گذاری در مورد انتخاب سهم‌هایی با عملکرد مناسب و همچنین تعیین زمان مناسب برای خریدوفروش، می‌تواند ارزش‌افزوده ایجاد نماید. یکی از معایب رویکرد فعال پرتفوی هزینه معاملاتی بالای آن می‌باشد. همچنین مشخص است که در استراتژی فعال، سرمایه‌گذار هم در معرض ریسک شرکت و هم در معرض ریسک بازار قرار می‌گیرد اما پرتفویی که با استفاده از روش غیرفعال مدیریت می‌شود فقط متأثر از ریسک بازار است. همچنین در طول بازه‌های زمانی طولانی‌تر، معمولاً شاخص بازدهی مناسبی را برای سرمایه‌گذار ایجاد خواهد نمود. با این توضیحات می‌توان با استفاده از رویکرد غیرفعال و ردیابی شاخص، هزینه‌های معاملاتی را پایین آورد و ریسک تحمیل‌شده به سرمایه‌گذار را تقلیل نمود.

ردیابی شاخص را می‌توان با استفاده از انتخاب ترکیب بهینه پرتفوی که وزن هر سهم دقیقاً متناسب با وزن آن در پرتفوی می‌باشد را انجام داد؛ اما با توجه به تعدیلاتی که بر روی شاخص اتفاق می‌افتد، ترکیب دارایی‌های یک پرتفوی ردیاب کامل دچار دگرگونی می‌شود و این مسئله هزینه‌های معاملاتی بالایی را به مدیر پرتفوی تحمیل می‌کند و به‌این‌ترتیب یکی از مهم‌ترین مزیت‌های مدیریت غیرفعال (هزینه معاملاتی پایین) ارزش خود را از دست خواهد داد.

---

1 . passive
2 . Active

با کاهش تعداد سهم‌های پرتفوی ردیاب، عملکرد پرتفوی و شاخص فاصله خواهند گرفت. میزان این اختلاف توسط معیار خطای ردیابی اندازه‌گیری می‌شود. ازاین‌رو یکی از روش‌هایی که برای ردیابی شاخص در نظر گرفته‌شده، استفاده از مدل‌های بهینه‌سازی ریاضی جهت کمینه نمودن خطای ردیابی مورد انتظار است (فوکاردی و فابوزی[1]، ۲۰۰۴). برنامه‌ریزی ترکیبی نیز به‌منظور مینیمم‌سازی خطای ردیابی مورداستفاده قرارگرفته است (کاناگوز و بیزلی[2]، ۲۰۰۹). از طرفی ردیابی شاخص بهبودیافته به معنی ماکزیمم سازی بازده پرتفوی تحت خطای ردیابی مشخص است (ایزلی و همکاران، ۲۰۰۳). همچنین به دلیل ماهیت غیرخطی تابع هدف یا محدودیت‌های مسئله از الگوریتم‌های حل غیرخطی و فرا ابتکاری توسط پژوهشگران مختلف استفاده‌شده است.

هدف از ارائه مقاله پیش‌رو در وهله اول، ارائه مدلی دو مرحله‌ای است که نسبت به مدل یک مرحله‌ای (صرفاً کمینه‌سازی خطای ردیابی) عملکرد بهتری را ارائه کند. همچنین در بعدی دیگر استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم می‌باشد که تاکنون در این‌گونه مسائل استفاده‌نشده است.

همچنین به‌منظور بهتر نشان دادن کارایی مدل‌ها از داده‌های مربوط به شاخص ۵۰ شرکت برتر از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۷ استفاده‌شده است. در ادامه، ابتدا به بیان پیشینه تحقیق پرداخته می‌شود؛ سپس مروری بر مبانی نظری صورت می‌گیرد. در انتها یافته‌های پژوهش و نتیجه‌گیری ارائه‌شده است.

مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

پیشینه تجربی پژوهش

تاکنون پژوهشگران روش‌های مختلفی را برای ردیابی شاخص ارائه کرده‌اند که در ادامه درباره این تحقیقات توضیحاتی ارائه‌شده است. توجه داشته باشید که در این پژوهش‌ها از مدل‌ها و الگوریتم‌های حل مختلفی استفاده‌شده است. همچنین به دلیل غیرخطی بودن توابع هدف یا محدودیت‌ها پژوهشگران از الگوریتم‌های حل مختلفی استفاده کرده‌اند. الگوریتم‌های فرا ابتکاری نیز ازجمله الگوریتم‌های کاربردی در این زمینه می‌باشند.

جنسن و دیجک[3] ردیابی شاخص را با در نظر گرفتن خطای ردیابی و محدودیت تعداد مدل کردند که در این روش آن‌ها خطای ردیابی و تعداد سهام را هم‌زمان کمینه کردند (جنسن و دیجک،

1 . Focardi & Fabozzi
2 . Canakgoz & Beasley
3 . Jansen & Dijk

۲۰۰۲). فوکاردی و فبوزی از روش خوشه‌بندی برای ردیابی شاخص استفاده کردند. آن‌ها با استفاده از تکنیک خوشه‌بندی سهامی که دارای سری زمانی مشابه بودند را در یک خوشه قراردادند و سرمایه‌گذار می‌تواند با توجه به اولویت‌های خود اوزان بهینه را تعیین کند و در انتها به این نتیجه رسیدند که این روش عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌های سنتی دارد (فوکاردی و فبوزی، ۲۰۰۴).

رافائلی[1] و بنل[2] برای مسئله ردیابی شاخص از دو الگوریتم ژنتیک و برنامه‌ریزی درجه دوم در بورس انگلیس استفاده کردند. نتایج ارائه‌شده مزیت روش ژنتیک را با در نظر گرفتن اندازه‌های مختلف و همچنین دوره‌های متعدد به‌روزرسانی ترکیب برای پرتفوی شاخصی به اثبات رسانید (رافائلی و بنل، ۲۰۰۶). اردوگان[3] و همکاران چندین عامل را در مدلی به‌منظور بیشینه‌سازی شاخص شارپ و کمینه‌سازی هزینه‌های معاملاتی در نظر گرفته‌اند. در این مدل به‌منظور پیش‌بینی دقیق‌تر بازده دارایی‌ها از مدل ارزش‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای استفاده‌شده است (ارودگان و همکاران، ۲۰۰۶).

کوریلی و مارسلینو[4] در خصوص یک روش حل مدل ردیابی شاخص بر این فرض که قیمت‌های سهام متأثر از یک مدل عاملی هستند، پژوهش نمودند. در روش مورداستفاده آن‌ها شاخص و پرتفوی شاخصی آن دارای ساختار عاملی مشابه بودند. رویکرد به کار گرفته‌شده عبارت است از مرتب‌سازی عوامل و سپس اضافه کردن سهمی به پرتفوی که دارای بیشترین همبستگی با عامل موردنظر است (کوریلی و مارسلینو، ۲۰۰۶). گیلی و کزلی[5] نیز به بررسی الگوریتم پذیرش آستانه‌ای[6] پرداختند و این الگوریتم را به‌عنوان رویکردی مؤثر در ردیابی شاخص معرفی نمودند (گیلی و کزلی، ۲۰۰۲).

کنو و ویجایانایاکا[7] به‌جای واریانس، به کمینه‌سازی قدر مطلق اختلاف بازده شاخص و بازده پرتفوی با استفاده از الگوریتم شاخه و کران پرداختند (کنو و ویجایانایاکا، ۲۰۰۱). رودلف[8] و همکاران نیز به معرفی معیارهایی خطی برای اندازه‌گیری خطای ردیابی پرداختند و با استفاده از

---

1 . Rafaely
2 . Bennell
3 . Erdogan
4 . Corielli &Marcellino
5 . Gilli & Kellezi
6 . Threshold accepting heuristic
7 . Konno & Wijayanayake
8 . Rudolf

برنامه‌ریزی خطی مقدار خطای ردیابی را کمینه نمودند و جواب مسئله را استخراج کردند (رودلوف و همکاران، ۱۹۹۹).

کاناکگوز و بیزلی[1] مدل‌سازی مسئله ردیابی شاخص را بر مبنای رگرسیون استوار کرده‌اند. مزیت این روش تبدیل مسئله ردیابی شاخص به یک مسئله خطی است. به‌عبارت‌دیگر هر دو مسئله سبد ردیابی و بهبود سبد به یک مدل خطی عدد صحیح تبدیل می‌گردد. آن‌ها همچنین در حل مدل سبد ردیاب، مسئله را به‌گونه‌ای مدل‌سازی کرده‌اند تا به بازده بیشتر از بازده سبد ردیاب دست پیدا کنند و یک مدل‌سازی جدید ارائه کرده‌اند (کاناکگوز و بیزلی، ۲۰۰۹).

روی[2] و همکاران مسئله ردیابی شاخص بهبودیافته با استفاده از مدلی بر مبنای تلورانس مجاز ریسک و خطای ردیابی حل شد. همچنین برای حل این مسئله از بهینه‌سازی استوار و رویکرد بهینه‌سازی عدد صحیح ترکیبی استفاده شد (روی و همکاران، ۲۰۱۷).

گارسیا و همکاران[3] با استفاده از برنامه‌ریزی درجه دوم و در نظر گرفتن محدودیت تعداد سهام، مسئله ردیابی شاخص را حل کردند. همچنین برای نشان دادن کارایی رویکرد ارائه‌شده، این روش را با الگوریتم‌های ژنتیک و الگوریتم جستجوی ممنوعه مقایسه کردند (گارسیا و همکاران، ۲۰۱۸).

پائولو[4] و همکاران مسئله ردیابی شاخص را با فرض در نظر گرفتن محدودیت بیشینه سرمایه‌گذاری بر روی هر دارایی حل کردند. آن‌ها تحت این شرایط، شاخص S&P500 را با در نظر گرفتن ده سهم منتخب ردیابی کردند و نتایج را با مسئله بدون محدودیت مقایسه کردند (پائولو و همکاران، ۲۰۱۹).

حنیفی و همکاران برای اولین بار مسئله پرتفوی ردیابی کننده شاخص را در ایران مدل کردند و در مسئله موردنظر با محدودیت عدد صحیح انتخاب ۵، ۱۰، ۱۵ و ۲۰ سهم از بازار سهام و با استفاده از الگوریتم ژنتیک به حل آن پرداختند. برای حل مدل بهینه‌سازی آن‌ها سه الگوریتم ژنتیک کلاسیک، الگوریتم ژنتیک چندمرحله‌ای و الگوریتم ژنتیک بهبودیافته استفاده کردند (حنیفی و همکاران، ۱۳۸۸).

در ادامه ورسه‌ای و شمس محدودیت کف و سقف سرمایه‌گذاری در هر سهم را به مدل بهینه‌سازی اضافه کردند و مسئله را حل کردند. حجازی از یک مدل ردیابی شاخص دو هدفه

---

1 . Canakgoz & Beasley
2 . Roy
3 . García
4 . Paulo

تک‌مرحله‌ای برای ایجاد یک صندوق شاخصی بهبودیافته استفاده کردند. آن‌ها از الگوریتم ژنتیک به‌منظور دستیابی به پرتفویی که هم بازدهی بیش از شاخص و هم کمترین خطای ردیابی شاخص داشته باشد، بهره بردند. نتایج مقایسه پرتفوی بهینه آنان نسبت به بازده شاخص بورس اوراق بهادار تهران بدین‌صورت بود که بازده صندوق شاخصی بهبودیافته ازلحاظ آماری با بازده شاخص قیمت و بازده نقدی بورس تهران تفاوت معناداری دارد و بازده صندوق بیش از بازده شاخص است (ورسه‌ای و شمس، ۱۳۸۹). عباسی و اکبری از یک مدل ردیابی شاخص برای ایجاد صندوق شاخصی استفاده کردند. آن‌ها برای ایجاد صندوق شاخصی از دو الگوریتم ژنتیک و تبرید شبیه‌سازی‌شده با استفاده از سهام‌های موجود در بورس تهران بهره بردند که نتیجه آن پژوهش برتری الگوریتم ژنتیک نسبت به الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده با معیار خطای ردیابی کمتر در تشکیل صندوق شاخصی بود (عباسی و اکبری، ۱۳۹۳).

لازم به ذکر است که در پژوهش روبرو سعی شده است که هم در بعد ارائه مدل که از مدل دو مرحله‌ای استفاده‌شده است. هم در بعد الگوریتم حل که از الگوریتم جستجوی مستقیم استفاده‌شده است، نوآوری داشته باشد. نوآوری مقاله در زمینه مدل استفاده از مدل دو مرحله‌ای است که مرحله اول کمینه کردن خطای ردیابی یا به‌نوعی ریسک پرتفوی و در مرحله دوم توجه به بازدهی پرتفوی می‌باشد. در بعد الگوریتم استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم و بررسی نتایج حاصل از آن در مسئله ردیابی شاخص می‌باشد تا قابلیت این الگوریتم بررسی و موردبحث قرار گیرد.

مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

فرموله کردن ریاضی مسئله ردیابی شاخص یک مرحله‌ای

یک مدل بهینه‌سازی ابزاری برای تصمیم‌گیری است که باهدف بهینه‌سازی تابع هدف با توجه به محدودیت‌های در نظر گرفته‌شده طراحی می‌شود. ردیابی شاخص به معنی ساخت پرتفویی با تعدادی محدود سهم به‌منظور ایجاد بازدهی شبیه به شاخص می‌باشد. در اینجا تابع هدف خطای ردیابی می‌باشد که این مقدار باید مینیمم گردد که در اینجا مدل یک مرحله‌ای نامیده می‌شود. این مدل به شرح زیر قابل‌تعریف است.

$$minimize\ E = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(R_{Pt} - R_{It})^2} \qquad \text{(مدل ۱)}$$

$$subject\ to$$

$$\sum_{i=1}^{N} Z_i = K$$
$$Z_i \epsilon \{0.1\}$$
$$L_i Z_i \leq x_i \leq U_i Z_i$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0$$

در مدل فوق E خطای ردیابی، T تعداد دوره‌ها، R_{Pt} بازدهی پرتفوی بهینه در زمان t، R_{It} بازدهی شاخص در زمان t، x_i وزن بهینه سهم iام، N تعداد کل سهام، Kتعداد سهام انتخاب شده برای ایجاد پرتفوی ردیابی شاخص می‌باشد. Z_i متغیر باینری به معنی وجود(مقداروجود (یا عدم وجود(مقداروجود (سهم iام در پرتفوی بهینه و L_i و U_i به ترتیب حد پایین و بالای وزن بهینه هر سهم در پرتفوی بهینه می‌باشد. در مدل فوق محدودیت اول نشان‌دهنده تعداد سهم موجود در پرتفوی می‌باشد که این تعداد k در نظر گرفته‌شده است. محدودیت بعدی مربوط به سقف و کف سرمایه‌گذاری در هر سهم می‌باشد و در ادامه محدودیت‌های مربوط به جمع اوزان برابر با یک و فرض عدم فروش استقراضی ارائه‌شده است.

فرموله کردن ریاضی مسئله ردیابی شاخص بهبودیافته دو مرحله‌ای

ردیابی شاخص بهبودیافته به منظور ایجاد بازده‌های پرتفوی تحت خطای ردیابی کمینه می‌باشد (ایزلی و همکاران، ۲۰۰۳). در این مقاله از روش دو مرحله‌ای برای دستیابی به پرتفوی شاخص بهبودیافته استفاده‌شده است. مرحله اول مربوط به پیدا کردن مقدار کمینه خطای ردیابی و در مرحله دوم بازدهی پرتفوی تحت خطای ردیابی کمینه ماکزیمم می‌شود. مدل مرحله اول دقیقاً مدل (۱) می‌باشد؛ اما مدل مرحله دوم مربوط به شرح زیر می‌باشد.

مدل ۲)

$$max\ R_p = \sum_{i=1}^{N} r_i x_i$$
$$subject\ to$$
$$\sum_{i=1}^{N} Z_i = K$$
$$Z_i \epsilon \{0.1\}$$
$$L_i Z_i \leq x_i \leq U_i Z_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$
$$E^* - \delta \leq E \leq E^* + \delta$$
$$x_i \geq 0$$

در مدل فوق E خطای ردیابی، T تعداد دوره‌ها، R_{Pt} بازدهی پرتفوی بهینه در زمان t، R_{It} بازدهی شاخص در زمان t، x_i وزن بهینه سهم iام، N تعداد کل سهام، K تعداد سهام انتخاب‌شده برای ایجاد پرتفوی ردیابی شاخص می‌باشد. Z_i متغیر باینری به معنی وجود(مقداروجود (یا عدم وجود(مقداروجود (سهم iام در پرتفوی بهینه، L_i و U_i به ترتیب حد پایین و بالای وزن بهینه هر سهم در پرتفوی بهینه و E^* خطای ردیابی بهینه در مرحله اول، δ مقدار تلورانس مجاز خطای ردیابی در مرحله دوم می‌باشد. به نوعی هدف از مرحله دوم ماکزیمم کردن بازده پرتفوی تخت تلورانس مجاز δ برای خطای ردیابی می‌باشد. محدودیت‌های مدل شبیه مدل مرحله یک بوده و محدودیت تلورانس مجاز δ برای خطای ردیابی به مدل اضافه‌شده است.

معیارهای ارزیابی عملکرد پرتفوی

در این بخش از مقاله به معرفی معیارهای استانداردی که برای بررسی عملکرد پرتفوی حاصل از به‌کارگیری مدل پایدار ردیابی شاخص مورداستفاده قرار می‌گیرند پرداخته می‌شود.

نسبت بازار

مقدار نسبت بازار از رابطه زیر محاسبه می‌شود؛ که در آن (r_p^t) نشان‌گر بازده پرتفوی در زمان t و (r_m^t) نشان‌دهنده بازده شاخص در زمان t است. مقدار مطلوب برای این شاخص نیز برابر ۱ است. مقدار بیشتر از ۱ نشانگر بازده مازاد نسبت به شاخص است.

$$MR^t = \frac{1 + r_p^t}{1 + r_m^t} \qquad (۱)$$

بتا

مقدار بتا که از رابطه زیر محاسبه می‌شود می‌تواند به‌عنوان معیاری برای ارزیابی عملکرد پرتفوی استفاده شود. در این رابطه مقدار (r_p) نشان‌دهنده بازده پرتفوی، مقدار (r_m) نشان‌دهنده بازده

شاخص هستند. همان‌طور که در قسمت‌های پیشین اشاره شد، پرتفوی ردیاب شاخص باید نسبت به رویدادهای اقتصادی، بازتابی یکسان با بازار داشته باشد. پس مقدار مطلوب برای بتای یک پرتفوی ردیاب برابر با ۱ است.

$$\beta = \frac{cov(r_p . r_m)}{\sigma_m^2} \quad (۲)$$

خطای ردیابی

خطای ردیابی معیار دیگری به‌منظور ارزیابی عملکرد پرتفوی ردیاب است. این مقدار که از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود عبارت است از انحراف استاندارد اختلاف بین بازده شاخص و بازده پرتفوی در طول بازه زمانی موردنظر. مقدار ایده آل این معیار نیز برابر با صفر است. در این رابطه r_I نشان‌دهنده بردار بازده شاخص و r_p نشان‌دهنده بردار بازده پرتفوی است.

$$TE^t = stdev(r_p - r_I) \quad (۳)$$

نسبت اطلاعاتی

مقدار نسبت اطلاعات از رابطه زیر محاسبه می‌شود و می‌تواند به‌عنوان معیار دیگری برای ارزیابی عملکرد پرتفوی ردیاب مورداستفاده قرار گیرد. مقدار بیشتر این نسبت برای پرتفوی مطلوب‌تر است.

$$IR^t = \frac{r_p^t - r_m^t}{TE^t} \quad (۴)$$

در مقاله پیش‌رو ازآنجاکه هم بازدهی برای سرمایه‌گذار مهم بوده و هم خطای ردیابی نیز مهم است از نسبت اطلاعاتی به‌منظور مقایسه مدل‌ها استفاده‌شده است. دلیل انتخاب این معیار توجه به ریسک و بازده به‌طور هم‌زمان می‌باشد که سرمایه‌گذار در زمان سرمایه‌گذاری و تشکیل پرتفوی شاخصی به دو جنبه سرمایه‌گذاری توجه داشته باشد.

الگوریتم ژنتیک

این الگوریتم برای بهینه‌سازی، جستجو و یادگیری ماشین مورداستفاده قرار می‌گیرد. اساس این الگوریتم قانون تکامل داروین (بقا بهترین) است که می‌گوید: موجودات ضعیف‌تر از بین می‌روند

و موجودات قوی‌تر باقی می‌مانند. درواقع تکامل فرآیندی است که روی رشته‌ها صورت می‌گیرد، نه روی موجودات زنده‌ای که معرف موجودات رشته است. درواقع، قانون انتخاب طبیعی برای بقا می‌گوید که هر چه امکان تطبیق موجود بیشتر باشد بقای موجود امکان‌پذیرتر است و احتمال تولیدمثل بیشتری، برایش وجود دارد. این قانون بر اساس پیوند بین رشته‌ها و عملکرد ساختمان‌های رمزگشایی‌شده آن‌ها می‌باشد (حجازی و همکاران، ۱۳۹۰).

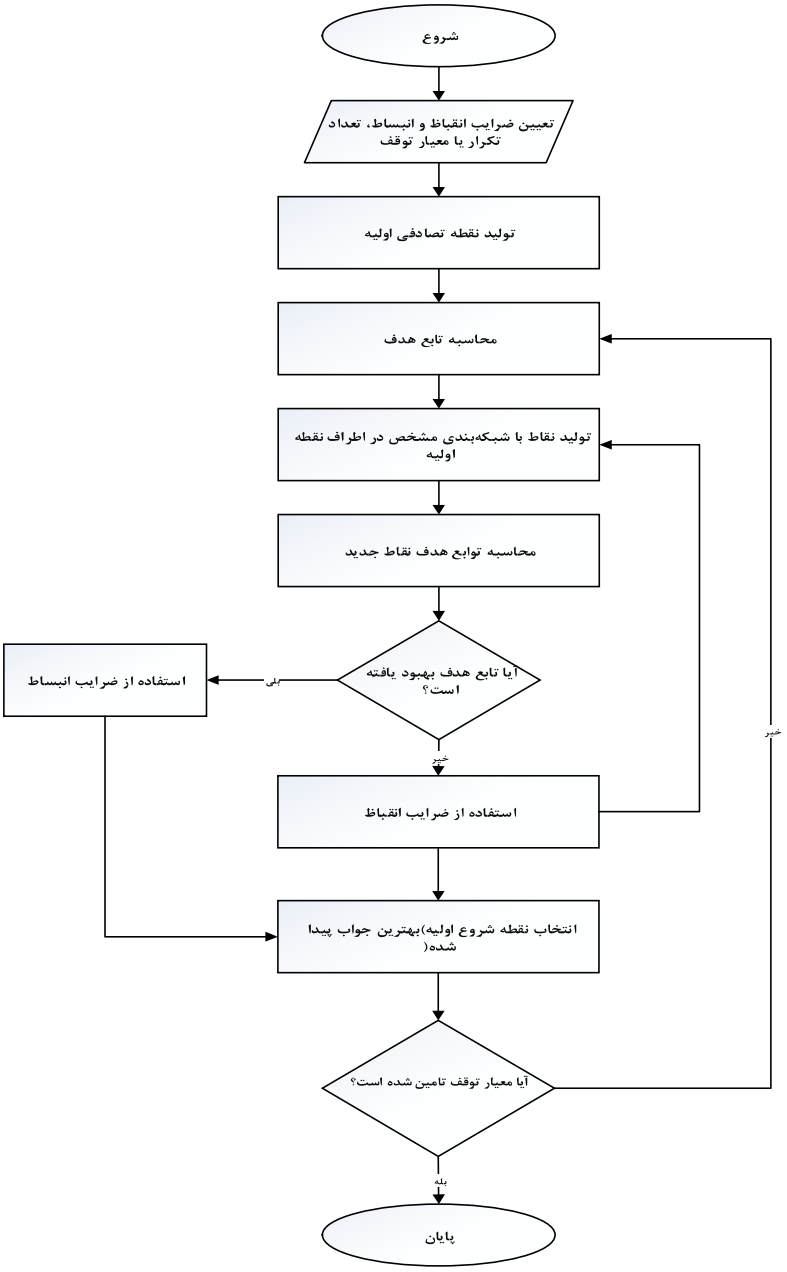
به‌طور خلاصه الگوریتم ژنتیک از عملگرهای زیر تشکیل‌شده است: کدگذاری[1]: این مرحله شاید مشکل‌ترین مرحله حل مسئله به روش الگوریتم باشد. ارزیابی[2]: تابع برازندگی را از اعمال تبدیل مناسب بر روی تابع هدف یعنی تابعی که قرار است بهینه شود به دست می‌آورند. ترکیب[3]: مهم‌ترین عملگر در الگوریتم ژنتیک، عملگر ترکیب است. ترکیب فرآیندی است که در آن نسل قدیمی کروموزوم‌ها با یکدیگر مخلوط و ترکیب می‌شوند تا نسل تازه‌ای از کروموزوم‌ها به وجود بیاید. جهش[4]: جهش نیز عملگر دیگری هست که جواب‌های ممکن دیگری را متولد می‌کند. در الگوریتم ژنتیک بعدازاینکه یک عضو در جمعیت جدید به وجود آمد هر ژن آن با احتمال جهش، جهش می‌یابد. در جهش ممکن است ژنی از مجموعه ژن‌های جمعیت حذف شود یا ژنی که تابه‌حال در جمعیت وجود نداشته است به آن اضافه شود. رمزگشایی[5]: رمزگشایی، عکسِ عمل رمزگذاری است. در این مرحله بعدازاینکه الگوریتم بهترین جواب را برای مسئله ارائه کرد لازم است عکس عمل رمزگذاری روی جواب‌ها یا همان عمل رمزگشایی اعمال شود تا بتوانیم نسخه واقعی جواب را به‌وضوح در دست داشته باشیم.

الگوریتم جستجوی مستقیم

الگوریتم جستجوی مستقیم در دهه ۵۰ میلادی معرفی‌شده است که از کاربردهای مختلی در بهینه‌سازی برخوردار است. این الگوریتم کاربردهای بسیار زیادی در زمینه آنالیز غیرخطی نیز دارد (لام[6] و لام، ۲۰۱۶). فلوچارت این الگوریتم به شکل زیر می‌باشد (محمدی قلعه‌نی و ابراهیمی، ۱۳۹۱).

---

1 . Encoding
2 . Evaluation
3 . Crossover
4 . Mutation
5 . Decoding
6 . Lam



شکل ۱. ساختار مدل بهینه‌سازی مبتنی بر الگوریتم جستجوی مستقیم

الگوریتم جستجوی مستقیم از یک نقطه تصادفی شروع و با استفاده از ضرایب انبساط و انقباض به سمت فضای بهینه حرکت می‌کند. در این الگوریتم ابتدا متغیرهای مختلف ازجمله ضرایب انبساط و انقباض، بیشینه تعداد تکرارها و جواب اولیه با توجه به محدودیت‌ها تولید می‌شود و سپس مقدار تابع هدف محاسبه می‌شود (لویس[1] و همکاران، ۱۹۹۸). سپس به سمت نقطه بهینه الگوریتم حرکت خواهد کرد. به این منظور از ضرایب انقباض و انبساط افزایش و فضای بیشتری را جستجو می‌کند. این روند تا زمانی ادامه می‌یابد که معیار توقف فعال شود.

دو نکته مثبت، دلیل انتخاب الگوریتم جستجوی مستقیم برای ارزیابی و بررسی در پژوهش حاضر بوده است. نکته نخست، سادگی کاربرد و نکته دوم، برآوردهای غیرصریح این الگوریتم می‌باشد. منظور از نکته نخست این است که این الگوریتم به دلیل تعداد کم پارامترهای ورودی جهت بهینه‌سازی و سرعت همگرایی توانایی زیادی برای حل مسائل غیرخطی را دارا می‌باشد. همچنین با توجه به پیشرفت کامپیوترهای امروزی، امکان اجرای این الگوریتم با استفاده از طریق نرم‌افزارهای مختلف مهیا می‌باشد. با وجودی که این الگوریتم ساده به نظر می‌رسد اما دارای خصوصیاتی با امکان همگرایی سراسری مشابه الگوریتم‌های جستجوی خطی است (محمدی قلعه‌نی و ابراهیمی، ۱۳۹۱). در سال‌های اخیر، الگوریتم‌های جستجوی الگو برای بهینه‌سازی پیچیده مسائل ریاضی استفاده و آزمایش‌شده است، اما این الگوریتم در بهینه‌سازی مسئله ردیابی شاخص بکار نگرفته شده است.

یافته‌های پژوهش

توصیف داده‌ها

به‌منظور نشان دادن کارایی مدل پیشنهادی از داده‌های بورس اوراق بهادار تهران و از بازه زمانی از اسفند ۱۳۹۳ تا اسفند ۱۳۹۶ استفاده‌شده است؛ که دارای شرایط زیر می‌باشد، استفاده‌شده است.

شرکت‌هایی که از اسفند ۱۳۹۰ در لیست سهام پذیرفته‌شده در بورس و فرابورس بوده‌اند و تا اسفند ۱۳۹۶ در این لیست باقی مانده‌اند.

---

1 . Lewis

داده‌های مذکور داری توقف طولانی در بازه زمانی ذکرشده نباشند؛ بنابراین شرکت‌هایی که بیشتر از سه ماه در طی تاریخ ذکرشده غیبت داشته‌اند از لیست سهام پیشنهادی حذف شده‌اند.

با توجه به نکات فوق سهام، حدود ۷۲ سهم انتخاب شد که برای ردیابی شاخص ۵۰ شرکت برتر (ارائه‌شده توسط بورس تهران) استفاده شد. توجه داشته باشید که داده‌ها به‌صورت روزانه با استفاده از نرم‌افزار *tseclient* جمع‌آوری‌شده است و ۷۵ درصد از داده‌های دوره زمانی مذکور برای اجرای مدل‌ها در دوره داخل نمونه و مابقی آن برای اجرای مدل‌ها در دوره خارج از نمونه مورداستفاده قرارگرفته است. بازده روزانه پرتفوی با استفاده از رابطه زیر به‌دست‌آمده است.

$$r_p = Ln\left(\frac{\sum_{t=k}^{T} w_i p_{it}}{\sum_{t=k}^{T} w_i p_{i_{t-1}}}\right) \quad (۵)$$

که در آن w_i وزن هرکدام از دارایی‌ها و p_i قیمت هر سهم در زمان t و $t-1$ می باشد. همچنین بازده روزانه شاخص ۵۰ شرکت فعال بر اساس رابطه زیر محاسبه‌شده است.

$$r_I = Ln\left(\frac{R_{It}}{R_{It-1}}\right) \quad (۶)$$

که در رابطه فوق R_{It} نشان‌دهنده بازده شاخص در زمان t می‌باشد.

اجرای مدل

برای بهینه‌سازی مدل مربوط به مرحله اول از الگوریتم‌های ژنتیک و جستجوی مستقیم استفاده‌شده است.

مشخصات الگوریتم ژنتیک مورداستفاده به شرح جدول زیر می‌باشد. این مشخصات با استفاده از الگوریتم راستی آزمایی بر روی هرکدام از این پارامترها مشخص‌شده است. برای حداکثر تعداد مجاز، مقادیر ۵۰۰ تا ۲۰۰۰ آزمایش‌شده است. اندازه جمعیت مقادیر ۲۰۰ تا ۱۰۰۰، نرخ تولیدمثل ۰٫۲ تا ۱ و برای نرخ جهش ۰٫۲ تا ۱ مورد آزمایش قرارگرفته شده است.

جدول ۱. پارامترهای ورودی موردنیاز برای اجرای الگوریتم ژنتیک

ردیف	پارامتر	مقدار
۱	حداکثر تکرار[1] مجاز	۱۲۰۰
۲	اندازه جمعیت[2]	٦۰۰
۳	نرخ تولیدمثل[3]	۰/٦
٤	نرخ جهش[4]	۰/۹

برای اجرای الگوریتم فوق از تابع ga در نرم‌افزار متلب استفاده‌شده است. همچنین برای اجرای الگوریتم جستجوی مستقیم از تابع patternsearch در نرم‌افزار متلب استفاده‌شده است.

حال در ادامه نتایج حاصل از اجرای الگوریتم برای حالت درون نمونه[5] و خارج از نمونه[6] ارائه‌شده است. برای اجرای مدل‌ها، تعداد سهم‌های مجاز در پرتفوی ۱۰ سهم و در مدل (۲) مقدار خطای مجاز (δ)، ۰,۰۰۴ در نظر گرفته‌شده است. همچنین مقدار کمینه سرمایه‌گذاری در هم سهم () ۲ درصد و مقدار بیشینه سرمایه‌گذاری در هر سهم () ۶۰ درصد در نظر گرفته‌شده است.

توجه داشته باشید که برای اجرای نشان دادن هر چه بهتر نتایج و اثبات قابلیت اتکای نتایج در آینده هم برای داده‌های درون نمونه و هم از نتایج خارج از نمونه استفاده‌شده است. نتایج درون نمونه نشان‌دهنده داده‌های تاریخی و نتایج خارج از نمونه نشان‌دهنده قدرت مدل برای داده‌های آینده می‌باشد.

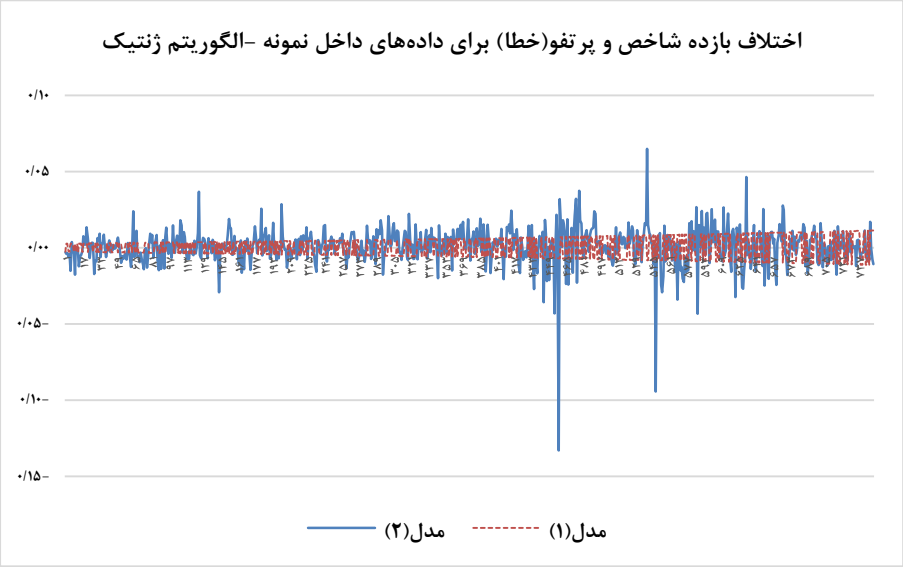
نتایج حاصل از اجرای مدل در حالت درون نمونه

نتایج به‌دست‌آمده با استفاده از الگوریتم ژنتیک

پس از اجرای الگوریتم ژنتیک به دست آوردن وزن‌های بهینه برای تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص است که کمترین میزان خطای ردیابی را داشته باشد. نمودار زیر مقایسه روند اختلاف بازده پرتفوی و شاخص در مدل (۱) و مدل (۲) را نشان می‌دهد.

---

1 . Iteration
2 . Population size
3 . Crossover
4 . Mutation
5 . In sample
6 . Out of sample



نمودار ۱. اختلاف بازده شاخص و پرتفو (خطا) برای داده‌های داخل نمونه برای الگوریتم ژنتیک

حال با استفاده از معیارهای ارزیابی عملکرد ارائه‌شده در بخش قبل، این دو مدل در جدول زیر مورد مقایسه قرارگرفته شده است.

جدول ۲. مقایسه معیارهای ارزیابی عملکرد در حالت درون نمونه در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک

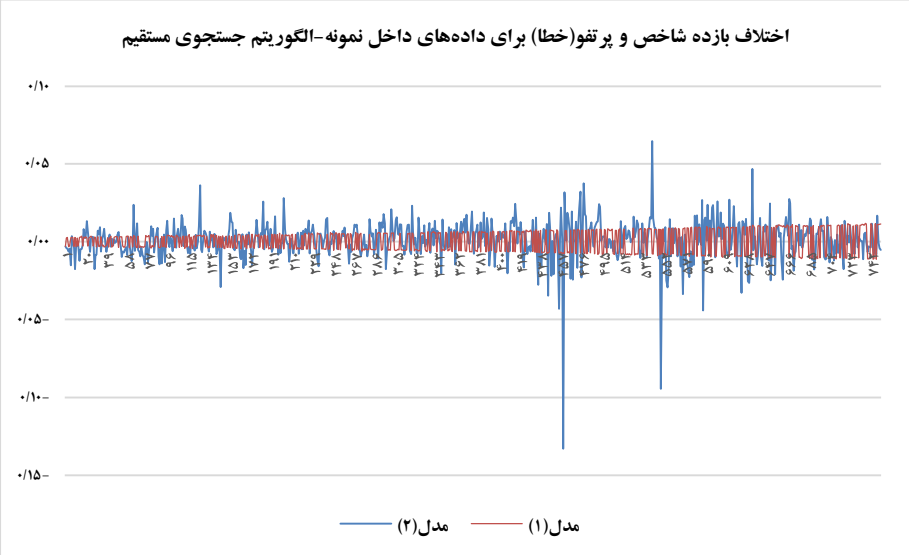
ردیف	شرح	مدل (۱)	مدل (۲)
۱	میانگین بازدهی (٪)	۰/۰۵۱	۰/۰٦۱
۲	نسبت بازار	۱/۰۰۱	۱/۰۱۰
۳	بتا	۰/۹۷۳	۱/۰۵۱
٤	خطای ردیابی (٪)	۰/۵۱۰	۰/۵٤٦
۵	نسبت اطلاعاتی	۰/۰۰۱	۰/۰۲۰

همان‌طور که در جدول فوق مشاهده می‌کنید، ازلحاظ میانگین بازدهی مدل (۲) دارای عملکرد بهتری برای داده‌های درون نمونه بوده و همچنین این مدل نسبت بازار بالاتری را دارا می‌باشد. بتای

مدل (۱) نسبت به بتای مدل دیگر بالاتر بوده و همچنین خطای ردیابی مدل (۱) نیز کمتر می‌باشد اما شاخصی که می‌تواند هم از بعد بازدهی و هم از بعد ریسک دو مدل را مورد مقایسه قرار دهد نسبت اطلاعاتی است که نسبت اطلاعاتی مدل (۲) مقداری بالاتر نسبت به مدل (۱) دارا می‌باشد. این مقایسه نشان می‌دهد که اگرچه مقدار خطای ردیابی مدل (۲) بالاتر از مقدار خطای ردیابی مدل (۱) می‌باشد، اما بالاتر بودن بازده این مدل باعث شده است که نسبت اطلاعاتی مطلوب‌تری برای سرمایه‌گذار ایجاد کند.

نتایج به‌دست‌آمده با استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم

همانند حالت قبل در اینجا از الگوریتم جستجوی مستقیم استفاده‌شده است. نمودار زیر مقایسه روند اختلاف بازده پرتفوی و شاخص در مدل (۱) و مدل (۲) را نشان می‌دهد.



نمودار ۲. اختلاف بازده شاخص و پرتفو (خطا) برای داده‌های داخل نمونه برای الگوریتم جستجوی مستقیم

حال با استفاده از معیارهای ارزیابی عملکرد ارائه‌شده در بخش قبل، این دو مدل در جدول زیر مورد مقایسه قرارگرفته شده است.

جدول ۳. مقایسه معیارهای ارزیابی عملکرد در حالت درون نمونه در حالت استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم

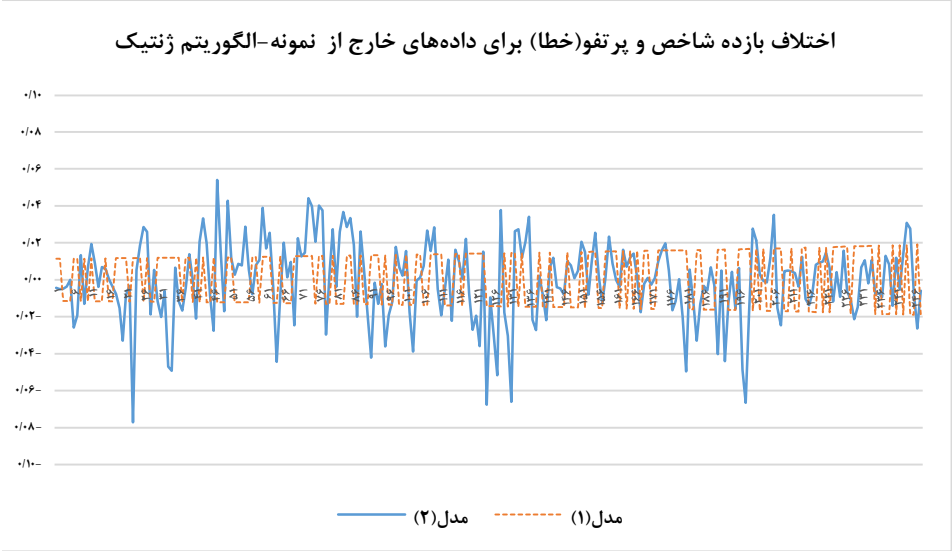
ردیف	شرح	مدل (۱)	مدل (۲)
۱	میانگین بازدهی (٪)	۰,۰۵۳٤	۰,۰٦۳٦
۲	نسبت بازار	۱,۰۰۳	۱,۰۱۲
۳	بتا	۰,۹۷۸	۰,۹۷۹
٤	خطای ردیابی (٪)	۰,۵۰۲	۰,۵۲۸
۵	نسبت اطلاعاتی	۰,۰۰۵۵۳	۰,۰۲۵

همان‌طور که در جدول فوق مشاهده می‌کنید، ازلحاظ میانگین بازدهی مدل (۲) دارای عملکرد بهتری برای داده‌های درون نمونه بوده و همچنین این مدل نسبت بازار بالاتری را دارا می‌باشد. بتای مدل (۲) نسبت به بتای مدل دیگر بالاتر بوده و همچنین خطای ردیابی مدل (۱) نیز کمتر می‌باشد؛ اما شاخصی که می‌تواند هم از بعد بازدهی و هم از بعد ریسک دو مدل را مورد مقایسه قرار دهد نسبت اطلاعاتی است که نسبت اطلاعاتی مدل (۲) مقداری بالاتر نسبت به مدل (۱) دارا می‌باشد. این مقایسه نشان می‌دهد که اگرچه مقدار خطای ردیابی مدل (۲) بالاتر از مقدار خطای ردیابی مدل (۱) می‌باشد، اما بالاتر بودن بازده این مدل باعث شده است که نسبت اطلاعاتی مطلوب‌تری برای سرمایه‌گذار ایجاد کند.

نتایج حاصل از اجرای مدل در حالت خارج نمونه

در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک

در این بخش از پژوهش پرتفوی به‌دست‌آمده در مرحله درون نمونه را ملاک قرار داده و نمودار اختلاف بازده پرتفوی و شاخص برای داده‌های خارج از نمونه و در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک می‌باشد.



نمودار ۳. اختلاف بازده شاخص و پرتفو (خطا) برای داده‌های خارج از نمونه در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک

در ادامه با استفاده از معیارهای ارزیابی عملکرد ارائه‌شده در بخش قبل، این دو مدل در جدول زیر مورد مقایسه قرارگرفته شده است.

جدول ٤. مقایسه معیارهای ارزیابی عملکرد در حالت درون نمونه در حالت استفاده از الگوریتم ژنتیک

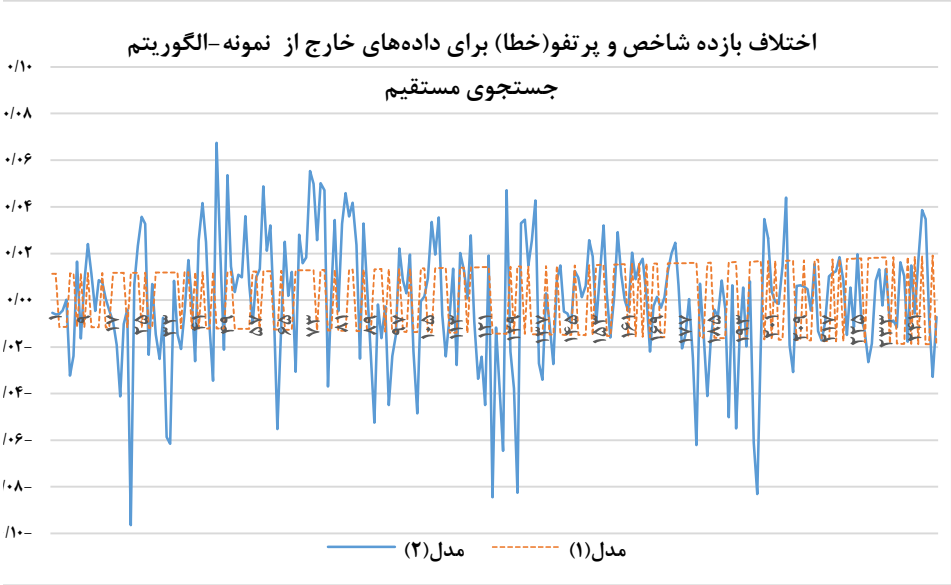
ردیف	شرح	مدل (۱)	مدل (۲)
۱	میانگین بازدهی (٪)	۰/۰۷٦	۰/۰۹۲
۲	نسبت بازار	۱/۰۰۸	۱/۰۲۳
۳	بتا	۰/۹۲٤	۱/۱۱٥
٤	خطای ردیابی (٪)	۰/٦٥٦	۰/۹۹۱
٥	نسبت اطلاعاتی	۰/۰۳۸	۰/۰٤۲

همان‌طور که در جدول فوق مشاهده می‌کنید، از لحاظ معیارهای بتا و خطای ردیابی، مدل (۱) دارای عملکرد بهتری نسبت به مدل (۲) می‌باشد؛ اما مدل (۲) از لحاظ معیارهای میانگین بازدهی،

نسبت بازار و نسبت اطلاعاتی دارای عملکرد بهتری می‌باشد؛ بنابراین از لحاظ ریسک، مدل (۱) و از لحاظ بازدهی مدل (۲) دارای عملکرد بهتری می‌باشد. اگر قصد داشته باشیم که هر دو عامل را موردبررسی قرار دهیم، از نسبت اطلاعاتی استفاده می کنیم که حاکی از بهتر بودن مدل (۲) در حالت خارج از نمونه می‌باشد.

در حالت استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم

در این بخش از پژوهش پرتفوی به‌دست‌آمده در مرحله درون نمونه را ملاک قرار داده و نمودار اختلاف بازده پرتفوی و شاخص برای داده‌های خارج از نمونه و در حالت استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم می‌باشد.



نمودار ٤. اختلاف بازده شاخص و پرتفو (خطا) برای داده‌های خارج از نمونه در حالت استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم

در ادامه با استفاده از معیارهای ارزیابی عملکرد ارائه‌شده در بخش قبل، این دو مدل در جدول زیر مورد مقایسه قرارگرفته شده است.

جدول ۵. مقایسه معیارهای ارزیابی عملکرد در حالت درون نمونه در حالت استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم

ردیف	شرح	مدل (۱)	مدل (۲)
۱	میانگین بازدهی (٪)	۰,۰۷۲	۰,۰۹۱
۲	نسبت بازار	۱,۰۰٤	۱,۰۲۲
۳	بتا	۰,۹۲۱	۰,۹۲۲
٤	خطای ردیابی (٪)	۰,٦۲۱	۰,۸۲۱
۵	نسبت اطلاعاتی	۰,۰۳۵	۰,۰۵۰

همان‌طور که در جدول فوق مشاهده می‌کنید، نتایج مشابه با الگوریتم ژنتیک به‌دست‌آمده است. ازلحاظ معیارهای بتا و خطای ردیابی، مدل (۱) دارای عملکرد بهتری نسبت به مدل (۲) می‌باشد؛ اما مدل (۲) از لحاظ معیارهای میانگین بازدهی، نسبت بازار و نسبت اطلاعاتی دارای عملکرد بهتری می‌باشد؛ بنابراین از لحاظ ریسک، مدل (۱) و از لحاظ بازدهی مدل (۲) دارای عملکرد بهتری می‌باشد. اگر قصد داشته باشیم که هر دو عامل را موردبررسی قرار دهیم، از نسبت اطلاعاتی استفاده می‌کنیم که حاکی از بهتر بودن مدل (۲) در حالت خارج از نمونه می‌باشد.

نتیجه‌گیری و بحث

در پژوهش پیش‌رو موضوع ردیابی شاخص به‌نوعی دیگر نگریسته شده است. در این پژوهش از روش دو مرحله‌ای به‌منظور ایجاد پرتفویی که هم خطای ردیابی را کمینه کرده و بازدهی پرتفوی را بیشینه کند، استفاده‌شده است. به این منظور از داده‌های مربوط به سهام بورس اوراق بهادار تهران استفاده شد.

نوآوری پژوهش روبرو از دو دیدگاه می‌باشد. دیدگاه اول مربوط به ارائه مدل می‌باشد. مدل ارائه‌شده در این مقاله برخلاف مدل‌های تک مرحله ارائه‌شده در مقالات پیشین دارای دو مرحله می‌باشد. مرحله اول مربوط به پیدا کردن مقدار کمینه خطای ردیابی و در مرحله دوم بازدهی پرتفوی تحت خطای ردیابی کمینه، ماکزیمم می‌شود. بعد دوم نوآوری مقاله مربوط به الگوریتم حل مدل‌ها می‌باشد. الگوریتم‌های بکار گرفته‌شده در این مدل الگوریتم ژنتیک و الگوریتم جستجوی مستقیم می‌باشد.

نتایج به‌دست‌آمده در حالت‌های استفاده از الگوریتم ژنتیک و الگوریتم جستجوی مستقیم حاکی از آن بود که هم در حالت خارج از نمونه و هم حالت داخل نمونه به لحاظ معیارهای ریسک مسئله ردیابی شاخص (خطای ردیابی و بتا) مدل سنتی دارای عملکرد بهتری است؛ اما به لحاظ شاخص‌های بازدهی (میانگین بازدهی، نسبت بازار) مدل پیشنهادی دارای عملکرد بهتری می‌باشد؛ اما برای ارزیابی دو عامل و مقایسه بهتر، از شاخص نسبت اطلاعاتی استفاده شد که مقایسه این دو مدل با استفاده از این معیار، حاکی از بهتر عمل کردن مدل پیشنهادی می‌باشد.

همچنین در حالت استفاده از داده‌های درون نمونه، الگوریتم جستجوی مستقیم دارای نسبت اطلاعاتی بالاتری نسبت به الگوریتم ژنتیک است. همچنین در حالت استفاده از داده‌های خارج از نمونه، الگوریتم ژنتیک دارای کارایی بالاتری در مدل تک‌مرحله‌ای یا سنتی است؛ اما در حالت استفاده از مدل دو مرحله‌ای، الگوریتم جستجوی مستقیم دارای کارایی بالاتری است.

برای پژوهش‌های آتی توصیه می‌شود که در طراحی مدل معیارهایی همچون بتا به مدل پیشنهادی اضافه شود و از سایر الگوریتم‌های فرا ابتکاری مانند الگوریتم گروه جستجو برای بهتر کردن جواب‌های به‌دست‌آمده استفاده شود.

منابع

- حجازی, رضوان. جعفری سرشت, داود و دلشادی, محمود (۱۳۹۰). « تشکیل صندوق شاخصی بهبود یافته با استفاده از الگوریتم ژنتیک »، فصلنامه بورس اوراق بهادار، شماره ۱۴, صفحات ۱۳۵ -۱۵۷.
- حنیفی، فرهاد. بحرالعلوم، محمدمهدی و جوادی، بابک (۱۳۸۸). « طراحی و تحلیل مقایسه‌ای الگوریتم‌های فرا ابتکاری جهت پیاده‌سازی سرمایه‌گذاری شاخص محور در بورس تهران» , فصلنامه چشم‌انداز مدیریت، شماره ۳۲, صفحات ۸۹ -۱۰۸.
- رضایی، علیرضا؛ رنجبران، سجاد (۱۳۸۶). آموزش الگوریتم ژنتیک در نرم‌افزار متلب. تهران، انتشارات آذر.
- عباسی، ابراهیم. اکبری، صمد (۱۳۹۳). « کاربرد الگوریتم‌های تبرید شبیه‌سازی‌شده و ژنتیک در تشکیل صندوق شاخصی ». فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره ۲۰ , صفحات ۱۳۵ -۱۵۷.
- محمدی قلعه‌نی، مهدی؛ ابراهیمی، کیومرث (۱۳۹۱)« ارزیابی الگوریتمهای جستجوی مستقیم و ژنتیک در بهینه‌سازی پارامترهای مدل غیرخطی ماسکینگام - یک سیلاب از کارون»، مدیریت آب و آبیاری، دوره ۲ ، شماره ۲، صفحات ۱-۱۲.
- ورسه ای، محسن و شمس، ناصر (۱۳۸۹).« ارائه یک روش حل ابتکاری به‌منظور بهینه‌سازی حل مسئله سبد ردیاب شاخص و پیاده‌سازی آن برای اولین بار در بازار سهام تهران» ، هشتمین کنفرانس بین‌المللی مدیریت.

- Abbasi, Ebrahim; Akbari, Samad (2015), application of SA and genetic algorithm in index tracking, No 20, pp.135-157, (in persian).
- Audet, C. & Dennis Jr, J. E. (2002). Analysis of generalized pattern searches. SIAM Journal on optimization, 13(3), 889-903.
- Beasley, J. E. Meade, N. & Chang, T. J. (2003). An evolutionary heuristic for the index tracking problem. European Journal of Operational Research, 148(3), pp.621-643.
- Canakgoz, N. A. & Beasley, J. E. (2009). Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation. European Journal of Operational Research, 196(1), pp.384-399.
- Corielli, F. & Marcellino, M. (2006). Factor based index tracking. Journal of Banking & Finance, 30(8), pp.2215-2233.
- de Paulo, W. L. Fontova, M. I. V. & de Souza, R. C. (2019). AN ANALYSIS OF A MEAN-VARIANCE ENHANCED INDEx TRACKING PROBLEM WITH WEIGHTS CONSTRAINTS.
- Erdogan, E. Goldfarb, D. & Iyengar, G. (2004). Robust portfolio management.

- Focardi, S. M. & Fabozzi 3, F. J. (2004). A methodology for index tracking based on time-series clustering. Quantitative Finance, 4(4), pp.417-425.
- García, F. Guijarro, F. & Oliver, J. (2018). Index tracking optimization with cardinality constraint: a performance comparison of genetic algorithms and tabu search heuristics. Neural Computing and Applications, 30(8), pp.2625-2641.
- Gilli, M. & Këllezi, E. (2002). The threshold accepting heuristic for index tracking. In Financial engineering, e-commerce and supply chain (pp. 1-18). Springer, Boston, MA.
- Hanifi et al(2010), Implementation and aomparision analyses of metaheuristic for index tracking portfolio, Financial Management Perspective, No 20, pp.89-108(in persian).
- Hejazi et all(2012), enhanced index traking with genetic algorithm, QUARTERLY JOURNAL OF SECURITIES EXCHANGE,No 14 ,pp.135-157(in persian).
- Jansen R and Dijk H. (2002). "Index Tracking, cointegration and equity market regimes". International Journal Of Finance And Economics, Vol 10, pp.213-237
- Konno, H. & Wijayanayake, A. (2001). Minimal cost index tracking under nonlinear transaction costs and minimal transaction unit constraints. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 4(06), pp.939-957.
- Kwon, R. H. & Wu, D. (2017). Factor-based robust index tracking. Optimization and Engineering, 18(2), pp.443-466.
- Lam, W. S. & Lam, W. H. (2016). Mathematical modeling of enhanced index tracking with optimization model. J. Numer. Anal. Appl. Math, 1(1), pp.1-5.
- Lewis RM and Torczon V (2000) Pattern search methods for linearly constrained minimization. SIAM Journal on Optimization. Pp. 917-941.
- Lewis, R. M. Torczon, V. & Trosset, M. W. (1998). Why pattern search works (No. ICASE-98-57). Institute for computer applications in Science and engineering hampton va.
- Mohammadi ghaleni, mehdi; Kiomars, Ebrahimi(2013), Evaluation of direct search and genetic algorithms in optimization of muskingum nonlinear model parameters - a flooding of Karoun river, journal of water and irrigation management, No2, pp.1-12, (in persian).
- Rafaely, B. & Bennell, J. A. (2006). Optimisation of FTSE 100 tracker funds: A comparison of genetic algorithms and quadratic programming. Managerial Finance, 32(6), pp.477-492.
- Rezaie alireza and Ranjbaran Sajad(2008), genetic algorithm learning, Azar publicaton(in persian).
- Roll, R. (1992). A mean/variance analysis of tracking error. The Journal of Portfolio Management, 18(4), pp.13-22.
- Rudolf, M. Wolter, H. J. & Zimmermann, H. (1999). A linear model for tracking error minimization. Journal of Banking & Finance, 23(1), pp.85-103.
- Strong, R. (2008). Portfolio construction, management, and protection. Nelson Education.
- varasai, mohsen; Naser, Shams (2011), present a solution based metahuristic algorithm for index traking in TSE, 8 th international management confroncess((in persian).